Риманове површи

Увод у алгебарске криве
и интеграбилне системе

3. децембар 2008

РадеедаР

1. Нека су p и q релативно прости природни бројеви. Доказати да за сваки пар тачака $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ такав да важи $z^p = w^q$ постоји један и само један комплексан број $t \in \mathbb{C}$ такав да је

$$z = t^q \text{ и } w = t^p.$$

Закључити одавде да је скуп тачака

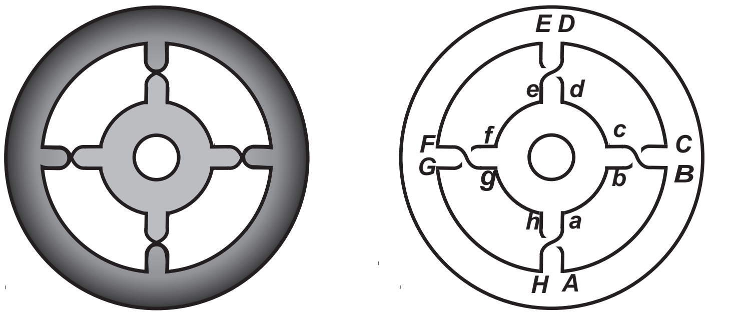
$$D_{p,q} := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^p = w^q, |z| \leq 1, |w| \leq 1\}$$

хомеоморфан дводимезнионалном диску $D := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| \leq 1\}$.

2. Одредити Ојлерову карактеристику $\chi(M)$ ако је M,

(а) пројективни простор RP^2 (б) Клајнова флаша.

3. Показати да је површ (са границом) приказана на Слици 1 са леве стране орјентабилна. Одредити колико компоненти има њена граница и наћи род затворене, орјентабилне површи која се добије ако се свака гранична компонента затвори диском.

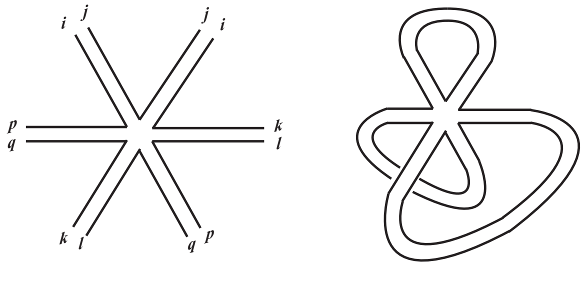


Слика 1:

4. Одредити родове свих орјентабилних површи које се могу добити слепљивањем слободних крајева површи C_6 приказане на Слици 2 (a) ("цвет" са 6 латица). Пример једног слепљивања дат је на Слици 2 (b). Одговорити на исто питање у случају цвета C_8 са 8 латица.

5. Показати да се сваки коначан граф може "нацртати" на некој орјентабилној површи M_g. Наћи минимални род g површи M_g у коју се може уложити граф $K_{3,3}$ (граф "три куће и три бунара") за који по теореми Куратовског знамо да није планаран тј. да се не може уложити у сферу.

6. Показати да се граф K_6 (комплетни граф са 6 темена) може уложити у пројективну раван RP^2. Закључити одавде да на пројективној равни постоји карта која се не може обојити са 5 боја.



(a) (b)

Слика 2:

Разграната наткривања; Hurwitz-Riemann итд.

7. Нека је за $n \in \mathbb{Z}$ пресликавање $\phi_n : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ задано са $\phi_n(z) = z^n$. Показати да је ϕ_n *наткривање* (covering space) тј. да је ϕ_n-инверзна слика сваког довољно малог диска $D_x \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ хомеоморфна суми n таквих дискова,

$$(\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0\})(\exists D_x \text{ околина од } x)\, \phi_n^{-1}(D_x) \cong U_x \times [n].$$

Одредити *монодромију* овог раслојења, `http://en.wikipedia.org/wiki/Monodromy`.

8. Нека је $\pi : M \to S^2$ разгранато наткривање са тачно 3 тачке гранања $a, b, c \in S^2$. Нека су p_1, p_2, p_3 одговарајуће монодромије (пермутације слојева). Доказати да је $p_1 \circ p_2 \circ p_3 = 1$ јединична пермутација. Обрнуто, ако су p_1, p_2 и p_3 три пермутације скупа $[n] = \{1, \dots, n\}$ такве да важи $p_1 \circ p_2 \circ p_3 = 1$, показати да постоји разгранато наткривање $\pi : M \to S^2$ са тачно 3 тачке гранања са оговарајућим монодромијама p_1, p_2 и p_3.

9. Нека су $p_1, p_2, ..., p_k$ пермутације које генеришу транзитивну подгрупу H групе пермутација S_n (транзитивност значи да за сваки пар елемената i, j постоји пермутација $g \in H$ таква да је $g(i) = j$). Нека важи

$$v(p_1) + v(p_2) + ... + v(p_k) = n - 1$$

где је $v(g) := n - p$ и p број циклова у "цикл декомпозицији" од g. Доказати да је за сваку пермутацију $i_1, i_2, ..., i_k$ индекса $1, 2, ..., k$ производ $p_{i_1} p_{i_2} ... p_{i_k}$ увек циклична пермутација реда n.

Упутство: Riemann-Hurwitz формула из теорије Римановых површи! "Елементарно" решење задатка није познато!!!

10. Сваки низ реалних бројева $a_1, a_2, ..., a_8$ такав да је

$$a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < a_5 > a_6 < a_7 > a_8 < a_1$$

је низ локалних максимума и минимума (критичних значења) тригонометријског полинома са реалним коефицијентима степена 8.

Напомена: Уместо броја 8 може да стоји било који паран број.