Жива математика – задаци

Октобар 2010

Раде-едаР

1. Нека је $p \in \mathbb{Z}[x]$ полином са целим коефицијентима без слободног члана, $p(0) = 0$. Показати да је p у идеалу генерисаном полиномима

$$1 - (1+x)^4 \quad \text{и} \quad x^m$$

ако и само ако су коефицијенти $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ цели бројеви где је

$$\frac{p(x)}{(1-(1+x)^4)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Применити овај критеријум на полином $q(x) = x^2 + 2x$ и доказати да је ред овог полинома у прстену

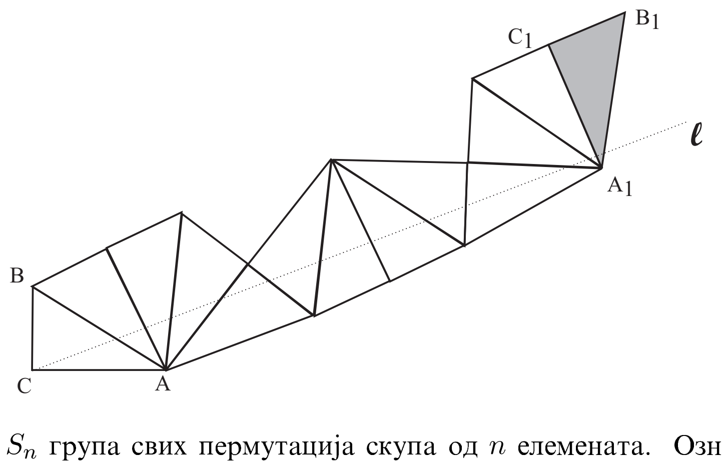
$$R = \mathbb{Z}[x]/\langle 1-(1+x)^4, x^m \rangle$$

једнак $2^{[\frac{m}{2}]}$. По дефицији ред елемента y заданог прстена R је најмањи природан број k такав да је $ky = 0$ у R.

2. Нека су R_a, R_b, R_c рефлексије (осне симетрије) у односу на стране $a = BC, b = AC, c = AB$ троугла ABC. Осенчени троугао $A_1B_1C_1$ (видети слику) добија се тако што се полазни троугао ABC преклапа (рефлектује) око одговарајућих страна у правцу полуправе l. Ако је I изометрија равни која преводи троугао ABC у троугао $A_1B_1C_1$ показати да се I може написати као композиција

$$I = R_1 \circ R_2 \circ R_3 \circ \ldots \circ R_{12}$$

где је $R_j \in \{R_a, R_b, R_c\}$.



3. Нека је S_n група свих пермутација скупа од n елемената. Означимо са (i, j) транспозицију, тј. пермутацију која замењује места елемената i и j док остале елементе

(1,1)

(1,2) (2,2)

(1,3) (2,3) (3,3)

(1,4) (2,4) (3,4) (4,4)

....

(1,n) (2,n) ...... (n-1,n) (n,n)

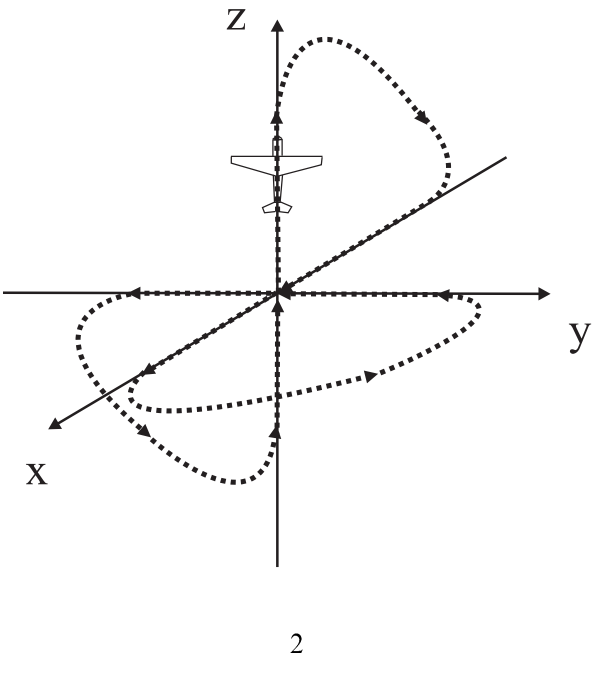
оставља на месту. Нека је $X_k = (1,k)+(2,k)+\ldots(k-1,k)+(k,k)$, збир свих елемената у k-тој врста следеће таблице (слика). Доказати да важи релација

$$X_1X_2\ldots X_n = \sum_{\pi\in S_n} \pi$$

где се сви рачуни изводе у тзв. **групној алгебри** $\mathbb{C}[S_n]$ групе S_n.

4. Авион на аеромитингу изнад Калемегдана изводи сложен маневар (видети слику). Прво лети вертикално (у позитивном смеру z-осе) и са крилима паралелним са y-осом, изводи петљу (у xz-равни). Када исправи авион и уђе у xy-раван наставља лет у позитивном правцу x-осе. У xy-равни (након што прође кроз координатни почетак) прави леви заокрет и (све време летећи хоризонтално са крилима у xy-равни) враћа са у координатни почетак летећи дуж y-осе. Када прође кроз координатни почетак понире и прави контра-петљу (све време са крилима паралелним x-оси) и прелази у пењање дуж z-осе.

Цео маневар се наставља на сличан начин. Авион (у пењању) улази у десни заокрет и (крећући се у xz-равни) поново прилази координтаном почетку дуж x осе (у томе тренутку крила су му паралелна z-оси). Након тога (све време са крилима паралелним са z-осом) улази у заокрет у xy-равни итд.



(a) Доказати да ће крила авиона (у тренутку кад се авион врати у полазни положај) описати Мебијусову траку!

$(b)^*$ Из (a) следи да се крајеви крила авиона крећу по једној затвореној кривој. Доказати да та крива НИЈЕ сплетена у чвор, тј. да се може непрекидним кретањем (без самопресецања) превести у положај кружнице у некој равни.