Geometrija brojeva

Rade Živaljević
Matematički institut SANU, Beograd
rade@turing.mi.sanu.ac.yu

1 Uvod

Zadaci su izabrani sa namerom da se odredjene poznate ili manje poznate ideje "kristališu" i dovedu u što snažniju medjusobnu organsku vezu. Osnovni (ali ne i jedini) cilj je da se dokažu svojstva *magičnih kružnica* (odeljak 6) i sva ostala tehnika u velikoj meri tome podredjena. Slika 2 se može shvatiti kao svojevrsni "nervni zavrešetak" ili "fokalna tačka" u preseku više matematičkih konstrukcija (teorija).

2 Mrlje i celobrojne tačke

M$_1$ Nekoliko nepravilnih mrlja nafte ukupne površine $3\,km^2$ razlilo se u oblasti gde se nalazi ribarska flota. Poznato je da je udaljenost izmedju svaka dva broda bar $2\,km$. Dokazati da postoji vektor $\overrightarrow{AB}$ dužine $|\overrightarrow{AB}| \leq 1\,km^2$ takav da će svi brodovi koji translatorno promene svoj položaj za ovaj vektor izaći iz zamrljane oblasti.

M$_2$ U krugu radijusa 16 rasporedjeno je 650 tačaka. Dokažite da postoji kružni prsten sa unutrašnjim radijusom 2 i spoljašnim radijusom 3 u kome se nalazi bar 10 zadanih tačaka.

M$_3$ Neka je C celobrojna rešetka u ravni, $C = \{(m,n) \in \mathbb{R}^2 \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$. Neka je $M \subset \mathbb{R}^2$ podskup (mrlja) površine veće od 1. Pokazati da tada postoje dve tačke A i B u M takve da je $\overrightarrow{AB}$ celobrojni vektor, tj. $\overrightarrow{AB} \in C$.

M$_4$ Neka su a i b nekolinerani vektori u ravni. Skup $C = C_{a,b} = \{ma + nb \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$ nazivamo rešetkom asociranom sa vektorima a i b. Dokazati sledeću generalizaciju tvrdjenja M$_3$. Pretpostavimo da je površina mrlje $M \subset \mathbb{R}^2$ veća od kD gde je k prirodan broj a D površina paralelograma sa vrhovima $0, a, b, a+b$. Tada postoje $k+1$ tačke u ravni $x_0, x_1, \ldots, x_k$ takve da je $x_i - x_j \in C$ za svaki par indeksa i, j.

M$_4$ Neka su a i b dva celobrojna vektora u ravni, $a, b \in C$. Dokazati da ako paralelogram obrazovan vektorima a i b ima površinu strogo veću od 1, onda se u unutrašnjosti tog paralelograma mora naći bar još jedna celobrojna tačka.

M$_5$ (Teorema Minkovskog) Neka je K, centralno simetrični, konveksni poligon u ravni sa centrom simetrije u koordinatnom početku $0 \in C$. Pretpostavimo da je površina tog poligona strogo veća od 4. Dokazati da u tom slučaju poligon sadrži još bar jednu celobrojnu tačku (pored koordinatnog početka).

Rezime: Neka je m neka "mera" veličine skupa (npr. površina, zapremina, funkcija $m(A) = |S \cap A|$ (na zadani konačan skup S) itd.). Od mere m se očekuje da je aditivna $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ (ako su A i B disjunktni), nenegativna i da je mera praznog skupa 0. Kratko rečeno, neka je dat par (X, m) gde je m mera definisana na (nekim) podskupovima od X.

- Neka su $A_1, \ldots, A_m$ podskupovi od A takvi da je

$$k\, m(A) < m(A_1) + m(A_2) + \ldots + m(A_m)\,.$$

  Tada postoji tačka koja se nalazi u $k+1$ skupova A_i.

- Skup X sa merom m se u navedenim primerima pojavljuje često kao **fundamentalni domen** $U \subset \mathbb{R}^2$. Pri tome je definisano jedno ili više **"transport" preslikavanja** $r : \mathbb{R}^2 \to U$ koja delove mrlje iz ravni prebacuju u fundamentalni domen. Da li možete u svakom primeru gde to ima smisla eksplicitno opisati fundamentalni domen i odgovarajuća transportna (prenosna) preslikavanja. Srodan primer transportnog preslikavanja je "razlomljeni deo" preslikavanje $x \mapsto \langle x \rangle := x - [x]$ shvaćeno kao transportno preslikavanje za fundamentalni domen $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

3 Farejev niz

Definicija 3.1. *Označimo sa F_n skup svih* **neskrativih** *razlomaka $\frac{a}{b}$ iz intervala $[0,1]$ takvih da im imenilac b ne prevazilazi zadani broj $n \in \mathbb{N}$.*[1] *Na primer*

$$F_5 = \{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\}$$

F$_1$ Pokazati da dva susedna razlomka, a/b i a'/b' u Farejevom nizu F_n ne mogu imati isti imenilac. Uveriti sa takodje da za takve razlomke važi $b + b' > n$.

F$_1$ Pokazati da ako su $a_1/b_1 < a_2/b_2$ susedni razlomci u Farejevom nizu F_n da onda važi relacija

$$a_2 b_1 - a_1 b_2 = 1\,. \tag{1}$$

[1] F_n je poznat kao n-ti Farejev niz. O istoriji Farejevog niza videti članak M. Bruckheimer, A. Arcavi, Farey series and Pick's area theorem, Math. Inteligencer, 4 (17), 1995.

F_3 Ako su $a_1/b_1 < a_2/b_2 < a_3/b_3$ tri uzastopna člana Farejevog niza F_n, onda važi

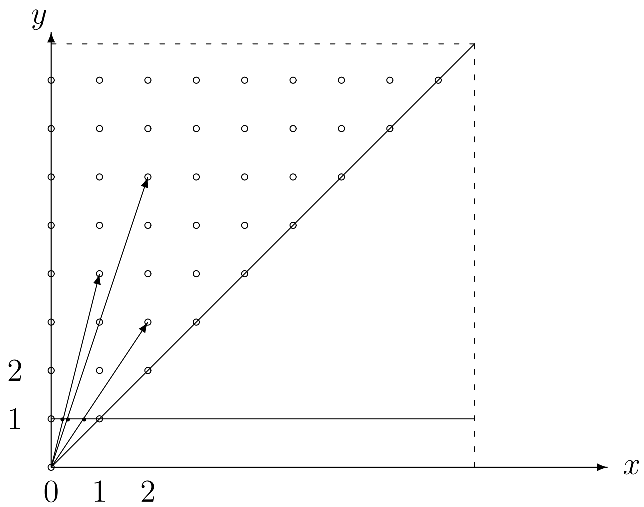
$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_3}{b_1 + b_3}. \tag{2}$$

F_4 Koliko se različitih pravih može prikazati na ekranu monitora? Model monitora M je pravougaona celobrojna mreža

$$[m] \times [n] = \{0, 1, \ldots, m-1\} \times \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Dve (geometrijske) prave u ravni odredjuju istu pravu na monitoru $M = [m] \times [n]$ ukoliko dele skup M na jednake delove, pri čemu ni jedna od njih ne sadrži tačke iz M.

Rezime: Slika 1 uspostavlja fantastičnu vezu izmedju razlomaka u intevalu $[0, 1]$ i celobrojnih tačaka $(x, y) \in C$ za koje važi $0 \leq x \leq y$. Veoma je korisno praviti **rečnik** za prevodjenje pojmova, konstrukcija, tvrdjenja iz aritmetike razlomaka u geometriju celobrojnih tačaka i obrnuto!



Slika 1: Razlomci $\longleftrightarrow$ primitivni celobrojni vektori!

4 Inverzija

Definicija 4.1. *Inverzija u odnosu na kružnicu $K(O; r) \subset \mathbb{R}^2$ poluprečnika r sa centrom u tački $O \in \mathbb{R}^2$ je preslikavanje koje svakoj tački X dodeli tačku Y takvu da su:*

(a) *tačke O, X i Y kolinearne i X i Y su sa iste strane od O,*

(b)
$$|OX||OY| = r^2.$$

Striktno govoreći inverzija $I = I_{O,r}$ je prelikavanja koje je definisano samo na probušenoj ravni $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Uvodjenjem tačke ∞ (beskonačnost) inverzija se prirodno širi na proširenu ravan $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ uz konvenciju da I preslikava O u ∞ i obrnuto ∞ u O.

I$_1$ Inverzija čuva uglove. Ugao izmedju dve glatke krive (npr. kružnice) u zadanoj tački njihovog preseka, je ugao izmedju odgovarajućih tangenti.

I$_2$ Svaka inverzija prevodi svaku kružnicu ili pravu u neku kružnicu ili pravu. Prava se može smatrati kružnicom koja prolazi kroz tačku ∞.

I$_3$ Na zadanu kružnicu $K(O, r)$ i asociranu inverziju $I = I_{O,r}$ odrediti sve kružnice (prave) koje ova inverzija preslikava u njih same.

I$_4$ Pokazati da se svako preslikavanje[2] $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleksne ravni, zadano formulom $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, gde su $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ i $ad - bc \neq 0$ može dobiti kao kompozicija translacija, rotacija, refleksija i inverzija.

5 Verižni razlomci

Definicija 5.1. *Razlomak oblika*

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

se naziva verižni ili neprekidni razlomak. Neprekidni razlomak $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ se na jedinstven način može zapisati u obliku razlomka p_n/q_n gde su p_n i q_n polinomijalni algebarski izrazi u varijablama $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Na primer

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}, \qquad \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1}, \qquad \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1}.$$

Svaki razlomak $p_k/q_k = [a_0, a_1, \ldots, a_k]$ za $k \leq n$ se naziva k-ti parcijalni razlomak polaznog verižnog razlomka.

V$_1$ Uz konvenciju $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$, dokazati da za sve $k = 1, \ldots, n$ važe rekurentne formule

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \qquad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \tag{3}$$

V$_2$ Dokazati relacije

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} \qquad p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = (-1)^k a_k . \tag{4}$$

[2]Ovakva preslikavanja se zovu *razlomljeno linearna.*

V$_3$ Pokazati da se svaki racionalni broj p/q na jedinstven način može prikazati u obliku verižnog razlomka $p/q = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ gde je a_0 ceo broj, a_i su prirodni brojevi za $i \geq 1$ i $a_n \neq 1$. Primetite da je u slučaju $a_n = 1$, $[a_0, a_1, \ldots, 1] = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1]} + 1]$.

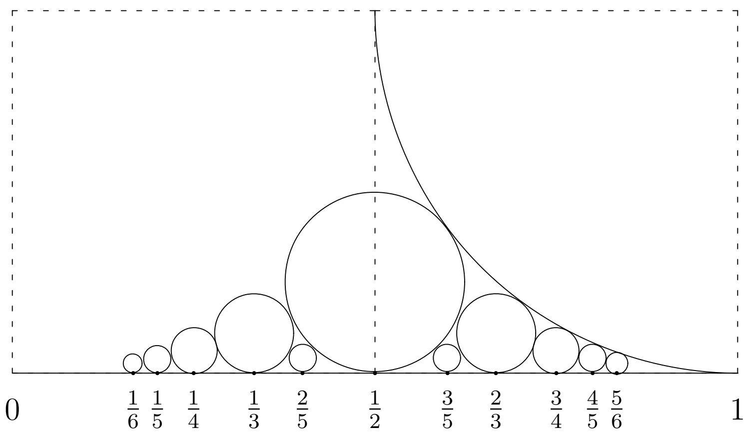
V$_4$ U kakvom se smislu može reći da se i svaki realni iracionalan broj x može na jedinstven način predstaviti u obliku beskonačnog verižnog razlomka

$$x = [a_0, a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots}}}$$

(Neka je $[x]$ ceo deo a $\langle x \rangle := x - [x]$ razlomljeni deo realnog broja x. Definišimo $a_0 := [x], a_1 := [\frac{1}{\langle x \rangle}]$ itd.)

6 Magične kružnice

Nacrtajte kružnicu prečnika 1 u gornjoj poluravni sa centrom u tački $(0, \frac{1}{2})$. Nacrtajte još jednu takvu kružnicu ali sa centrom u tački$(1, \frac{1}{2})$. Ove dve kružnice se dodiruju u tački $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Nastavite ovu konstrukciju, drugim rečima dozvoljeno je docrtati novu kružnicu bilo gde na slici pod uslovom da ta kružnica dodiruje horizontalnu pravu (x osu) kao i još dve, prethodno konstruisane kružnice pod uslovom da se one medjusobno dodiruju.



Slika 2: Magične kružnice

K$_1$ Posmatrajmo skup svih dodirnih tačaka konstruisanih kružnica sa x-osom. Eksperiment (videti sliku) pokazuje da su ove dodirne tačke racionalni brojevi! Pokazuje se zapravo da je svaki racionalni broj p/q (pri čemu su p i q relativno prosti brojevi) u intervalu $[0, 1]$ dodirna tačka odgovarajuće kružnice $C_{p/q}$! Dokažite ovu činjenicu.

K_2 Pokažite da je prečnik kružnice $C_{p/q}$ jednak $(1/q)^2$. Pokažite da ako je kružnica $C_{p,q}$ dobijena opisanom konstrukcijom iz kružnica $C_{p'/q'}$ i $C_{p''/q''}$ onda medju dodirnim tačkama važi relacija

$$\frac{p}{q} = \frac{p' + p''}{q' + q''} \tag{5}$$

K_3 Posmatrajmo skup C_n dodirnih tačaka svih kružnica koje seku pravu $y = (1/n)^2$. Pokazati da je $C_n = F_n$, tj. da je C_n n-ti Farejev niz.

K_4 Na zadani $x \in [0, 1]$, neka je C_{p_n/q_n} niz kružnica takav da je p_n/q_n n-ta aproksimacija broja x u obliku verižnog razlomka. Dati geometrijsku deskripciju niza p_n/q_n.

Pretpostavimo da smo Sliku 2 raširili svuda duž x ose translacijama za cele vektore. Dobijamo navi familiju kružnica $C_{p/q}$, po jednu za svaki racionalan broj p/q. Saglasno odeljku 5, pravu $y = 1$ ćemo videti kao jednu od ovih kružnica koja tangira x osu u tački $\infty = 1/0$. Ovako dobijen skup magičnih kružnica označavamo sa $\mathcal{M}$.

Z_1 Pokazati da preslikavanje kompleksne ravni definisano u zadatku I_4 u odeljku 5 preslikava skup $\mathcal{M}$ u sebe ako i samo ako su a, b, c, d **celi** brojevi takvi da je

$$ad - bc = 1\,.$$

Z_2 Pokazati da za svake dve magične kružnice iz $\mathcal{M}$ postoji transformacija navedenog vida koja prevodi jednu od tih kružnica u drugu.

Z_3 Iskoristiti ove činjenice za novi dokaz tvrdjenja K_1.

Napomena: Grupa G svih transformacija kompleksne ravni koje čuvaju skup svih magičnih kružnica se zove *modularna grupa.*

Molba: Molim vas da mi pošaljete na navedenu e-adresu (kad god se setite), bilo kakav interesantan zadatak koji vam se čini direktno ili indirektno povezan sa sadržajem ovog teksta.

Matematička gimnazija Beograd, maj 2004.