

Жива математика
Промоција математике на часу математике
Проф. др Раде Живаљевић
Математички институт САНУ
Републички семинар о настави математике
Крагујевац, 14 - 15 јануар 2012

Циклус од четири предавања под заједничким насловом “Жива математика” има за циљ да отвори дискусију о новим методама у настави математике који час математике могу да учине садржајнијим и занимљивијим. Понуђене теме су део програма развијеног у оквиру пројекта популаризације “Жива математика” (Министарство просвете и науке) који је развијен и тестиран у предавањима и математичким радионицама у сарадњи са Центром за промоцију науке, Београд.

Наслови предавања

1. час: Шта је то *хекатоникосахорон*?!
2. час: Математички експеримент на часу
3. час: Геометрија и алгебра Боромејских прстенова
4. час: Занимљива криптографија

Кратак опис предавања

Тема првог часа је популаризација математике на часу, али и пре и после часа математике! Идеја је да се кроз садржаје које ученик и наставник препознају као део стандардног курикулума објасни значај изучавања математике као и њена у улога у размевању света око нас. Математика је “најлепша и најважнија” од свих наука а да се у то убедимо помоћи ће нам математички камен мудрости “*хекатоникосахорон*”.

Други час се природно наставља на први али са драматичном променом перспективе. Решавамо конкретне математичке задатке који су тако изабрани да се њихово разумевање илуструје изразом модела од пластичних сламки (за сокове!). Анализирамо политопе и њихове мреже, полигоне, графове, кодове, који се могу конструисати на лицу места од стране свих учесника. Овај час има карактер интерактивне радионице.

Трећи час показује како “настаје математика” (према чланку “Боромејски прстенови или како уметнички окачити слику“, Тангента 59/3, 2009-2010). Користимо (код нас!) урађене компјутерске анимације које анализирају геометрију и алгебру боромејских и брунејских прстенова. Користимо и (код нас!) урађен специјални “Боромејски математички чивилук” на ком ће учесници својеручно моћи да понове неке од експеримената виђеним на анимацијама, али и да сами дизајнирају своје експерименте.

Последњи час је посвећен занимљивој криптографији, односно кодовима за откривање и корекцију грешака. Користимо специјално израђене карте (које сваки учесник може лако направити према датим упутствима) које нам помажу да након седам питања откријемо “лажова”. Елементарни задаци са полиномима нам помажу да објаснимо ученицима како функционишу ови кодови за откривање грешака и да виде још једну од многих примена математике (мобилни телефони, музички дискови, итд.).

Прва два часа се ослањају на две веома интересантне анимације

<http://www.youtube.com/watch?v=MFXRRW9goTs>

<http://www.youtube.com/watch?v=1VXDejQcAWY>

Ове две анимације дају полазни мотив за израду геометријских модела од пластичних сламки (за сокове!). Као што се види на приложеној фотографији, ученици праве правилне полигоне настављањем сламки. Користе се сламке са савитљивим крајем (који се ставља у уста) и који се може увући у дужи део суседне сламке (ако се уздуж скоро до ребрастог дела исече маказама). Коришћењем лепљиве траке (селотејп) добијени полигони се ивицама слепљују један за други и граде занимљиве политопа.

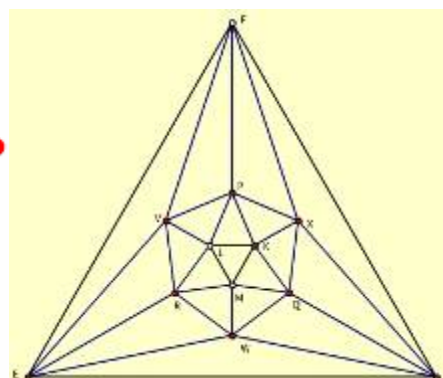
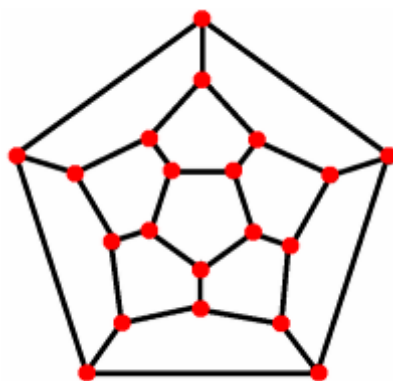


Приложене анимације дају много занимљивих примера а многи други примери и “мустре” могу се наћи на интернету, видети нпр.

<http://mathworld.wolfram.com/ArchimedeanSolid.html>

<http://www.sivakrishna.com/full.html>

Додекаедар и икосаедар су посебно захвални модели (на следећој слици приказани су графови темена и ивица ових политопа).



Следећи задаци се могу решавати и независно од модела али је са направљеним моделима њихово решавање много лакше и занимљивије. Поред тога тако се стиче и дубље разумевање богате геометрије правилних политопа.

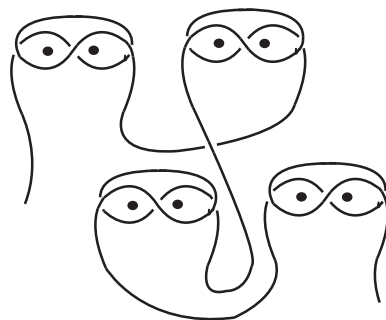
Задаци:

1. Изабрати једно теме додекаедра (нпр. неко теме на слици горе лево). Одредити сва суседна темена овог темена. Одредити сва темена до којих се може стићи у два (три, четири, пет) корака.
2. Колико различитих дужина могу имати дужи које повезују два различита темена додекаедра!?
3. Кажемо да је дуж која повезују два темена додекаедра *типа 2* уколико та темена имају заједничко суседно теме. Показати да две дужи типа 2 које полазе из истог темена заклапају прави угао. Упутство: Уочити квадрат од дужи типа 2.
4. Показати да се у додекаедар може уписати коцка тако да су сва темена коцке нека темена додекаедра.
5. Колико се различитих коцки може уписати у додекаедар!?
6. Колико има тетраедара описаних око икосаедра!?



7. Наћи угао између дијагонала додекаедра које полазе из истог темена. Упутство Искористити чињеницу да су дијагонале додекаедра могу бити дијагонале неке од коцки уписаних у додекаедра.
8. У играма се користе поред обичних и икосаедралне коцкице са боројевима од 1 до 20 уписаним на њиховим странама. Да ли је могуће закотрљати једну такву икосаедралну коцкицу тако да се коцка нађе на свакој страни тачно једанпут!?

Чланак “Боромејски прстенови или како уметнички окачити слику“, на коме се базира **трећи час**, може се наћи на адреси <http://www.rade-zivaljevic.appspot.com/ziva-matematika/popularni-clanci-tangenta/brunejski-prstenovi.pdf>



У чланку се могу наћи и асоцирана вежбања и задаци а на страни <http://www.rade-zivaljevic.appspot.com/index.html> се налази и линк за асоцирану анимацију.

Карте које се користе у последњем часу могу се наћи у документу
http://www.ms.uky.edu/~jrge/Papers/Seven_cards.pdf

Документ је потребно отштампати двострано или једнострано а онда комбиновати по две стране између којих се може уметнути и картон како би се добиле дебље карте. Након тога се карте могу исећи. Постоји још једна, осма карта, која нема полеђину и која служи за тумачење одговора.

Експеримент “У лажи су кратке ноге”

Извођење експеримента:

Изабере се седам ученика који се замоле да изаберу и запамте један од понуђених 16 бројева. Сваки од 7 ученика одговара са ДА или НЕ на питање да ли се задани број налази на одговарајућој карти, при чему највише један од ученика може да да погрешан одговор.

Ставимо пред себе на сто осму карту. Покажемо првом ученику прву карту и питамо да ли је непознати број на тој карти. Ако је одговор ДА та се карта лицем према нама ставља на осму карту, у противном се карта ставља на осму карту окренута са друге стране. Слично се ради са другом картом и другим учеником итд. Кад се испитивање заврши пред нама је шпил од седам карата које су наслагане преко осме, контролне карте.

Ако ни један ученик није слагао, видећемо на осмој карти непокривен непознат број. Ако је један ученик слагао сви бројеви на осмој карти биће покривени али је један од тих бројева заклоњен само једном од седам карата. На тај начин се може одредити и непознат број и који је ученик дао лажан одговор.

Допунске информације у вези са прва два часа

Анимација

<http://www.youtube.com/watch?v=MFXRRW9goTs>

коришћена на првом часу, као крајњи циљ има опис знаменитог четвородимензионалног политопа који има 120 додекаедралних страна. Овај мистериозни објект, који можемо звати 120 – страник (хекатоникосахорон) или *хипердодекаедар*, један је од најинтересатнијих објеката целе математике!!!

У наставку су релеватне чињенице које могу да послуже као основа за популарно предавање о математици али и као допуна часова 1 и 2 која нашу причу о сламкама и правилним политопима ставља у виши научни контекст.

Питање за квиз “Милионер”

Штаје то хекатоникосахорон (hecatonicosachoron)?!

(а) страшни диносаурус који је изумро пре 120 милиона година,

- (б) чукундедин чукундеда,
- (ц) хипердодекаедар (четвородимензионално правилно геометријско тело, са 120 правилних додекаедралних страна).
- (д) врста зглавкара (стонога *scolopendra gigantea*) са 120 ногу.

Зашто хипердодекаедар!?



Слика 1: Поглед у хипердодекаедар (тродимензионална слика)

(1) Прозор у четврту димензију. По узору на анимацију

<http://www.youtube.com/watch?v=MFXRWW9goTs>

могуће је направити тродимензионални модел (скулптуру) хипердодекаедра који се састоји од два “грозда” од по 60 правилних додекаедара. У плану је да посетиоци изложбе и други учесници, уз неопходну помоћ и објашњења, допринесу изградњи ове скулптуре прављењем додекаедара од посебно за то припремљених “пластичних сламчица за сокове”. Конструкција дочарава објект који се природно разоткрије тек у четвородимензионалном простору. Корисна аналогија је са *мебијусовом траком* која се као објект тродимензионалног света дочарава у две димензије као правоугаоник са слепљеним супротним ивицама. Проблем разумевања и дочаравања виших димензија из угла дводимензионалног света је лепо анализиран у филму о полигонима као становницима државе “Равније” (Flatland)

<http://www.youtube.com/watch?v=C8oiwnNlyE4>

(2) **Поенкареова хипотеза и поенкареова хомолошка сфера.** Са хипердодекаедром је на интересантан начин везана и историја *Поенкареове хипотезе*, једног од најчувенијих математичких проблема решеног пре само неколико година (руски математичар Григориј Перелман, 2003). Анри Поенкаре (Henri Poincaré, француски математичар) је у оквиру анализе основних тродимензионалних објеката који имају основне особине тродимензионалне сфере открио тзв. додекаедралну Поенкареову сферу (која је веома блиска хипердодекаедру са слике 1). Ово га је навело да постави далекосежну хипотезу о природи ових објеката али и “измисли” потпуно нову научну дисциплину која се бави квалитативним особинама просторних форми (Топологија). Решење Поенкареове хипотезе је у анкети часописа “Наука” (Science) означен као највећи продор у науци за 2006 годину (“Breakthrough of the Year”).

<http://www.sciencemag.org/site/feature/misc/webfeat/btoy2006/>

(3) **Космолошки модел базиран на хипердодекаедру и Поенкареовој сфери.**

Занимљиво је да постоји и космолошки модел базиран на Поенкареовој додекаедралној сфери, односно хипердодекаедру

<http://physicsworld.com/cws/article/news/18368>

Посматрач који би могао довољно далеко да види у том универзуму би могао осмотри (као у соби са огледалима) исте предмете виђене у разним деловима неба.

(4) **Хипердодекаедар је симбол јединства математике.** Он је фокална тачка и пресек великог броја њених дисциплина, односно велико нервни чвориште математике из кога се гранају путеви у готово све њене области. Није необично да хипердодекаедар побуђује спонтано дивљење својом симетријом и тајанственом лепотом доступном и нетренираним очима и умовима!

Напомена:

Додатне информације, слике, чланци и путокази ка другим изворима могу се наћи на

<http://en.wikipedia.org/wiki/120-cell>

На адреси (али и на другим местима)

<http://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=Special%3ASearch&search=120-cell>

се може наћи галерија слика хипердодекаедра.

Симетрија хипердодекаедра

Хипердодекаедар је веома симетричан објект. По типу симетрије он је веома сличан **ИКОСАЕДРУ** (то је тзв. **Е8** тип симетрије, видети ниже АДЕ класификацију). За **Е8** симетрије погледати (**изванредну!!!**) адресу

<http://www.google.com/search?q=E8+symmetry&hl=en&client=firefox-a&hs=DWg&rls=org.mozilla:en-US:official&prmd=ivns&tbn=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=VSVOTvKnM4PcAbPrKCeAw&ved=0CDgQsAQ&biw=1280&bih=678>

Такође **све занимљивости** везане за икосаедар (нпр. **његова појава у природи**) се могу везати и за хипердодекаедар. О икосаедру се може наћи огромна количина интересатних слика и информација на

<http://en.wikipedia.org/wiki/Icosahedron>

АДЕ мистерија и објект Е8

Једна од највећих мистерија у савременој математици је тзв. АДЕ класификација http://en.wikipedia.org/wiki/ADE_classification

Кратко речено у математици је уочена правилност (попут периодног система у хемији) којој се неким чудом подвргавају математички објекти и структуре из великог броја и на првих поглед удаљених и међусобно неповезаних области математике и физике!. Објект **E8** у тој класификацији је асоциран са *икосаедром* (братам близанцом додекаедра). Сам хипердодекаедар се добија “водиинсталатерском хирургијом” по Коксетеровом дијаграму типа **E8** (више о томе у књизи Glen Bredon, *Topology and Geometry*, Springer 1997, стране 353 до 354 и 426 до 429).

Неке интересатне **E8** адресе:

E8 symmetry spotted in ultracold magnet,
<http://physicsworld.com/cws/article/news/41373>

Is this the fabric of the universe? <http://www.telegraph.co.uk/science/science-news/3352140/Is-this-the-fabric-of-the-universe.html>

<http://www.google.com/search?q=E8+symmetry&hl=en&client=firefox-a&hs=DWg&rls=org.mozilla:en-US:official&prmd=ivns&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=VSVOTvKnM4PCtAbPrKCeAw&ved=0CDgQsAQ&biw=1280&bih=678>

Месец мај, месец математике

<http://www.mi.sanu.ac.rs/>

Желимо да са свима, од 7 до 107 година, поделимо радост и узбуђење математичког погледа на свет ствари и појава око нас. Препознаћемо математику и у неким једноставним и свакодневним предметима, следићемо је на путу ка неком од њених врхова и мистерија, али се и лепо забавити и поиграти наоко безазленим геометријским конструкцијама.

Све око нас *математикује* односно спонтано у нашим умовима производи математику као вештину налажења и препознавања образаца и правилности у појавама. Реч математика је у неким језицима просто синоним за “тачно знање” а математика се посебно бави објективном анализом појава везаних за *структуру, количину, простор и промену*.

Још неке корисне информације

Леп и кратак преглед за znalце.

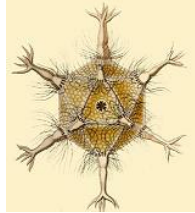
Следћи одломак је из чланка Џона Стилвела (Notices American Mathematical Society) који је кононска референца за хипердодекаедар (120-cell).

One of the most beautiful objects in mathematics is the regular polytope in 4-dimensional space whose boundary consists of 120 dodecahedral cells. This 120-cell is a

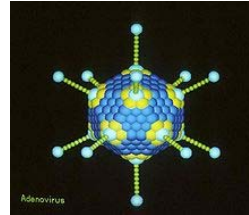
rarity among rarities because it lives in three very special worlds. Its home is among the regular polytopes in 4-space, but it also lives in the remarkable sphere S^3 and in the quaternions H . And if this is not enough, the 120-cell encodes the symmetry of the icosahedron and the structure of the Poincaré homology sphere.

The Story of the 120-Cell, *John Stillwell*
<http://www.ams.org/notices/200101/fea-stillwell.pdf>

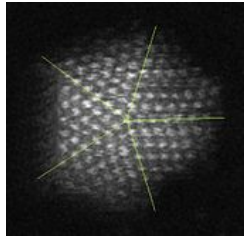
Симетрије хипердодекаедра (икосаедра) у природи



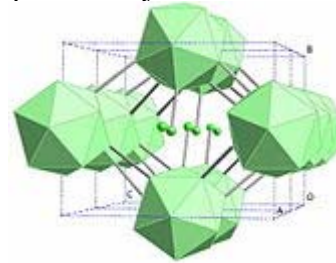
гадиоларија



икосаедрална овојница аденовируса



наночестица злата



алотропска модификација бора

Компјутерске и друге игрице

На [www](http://en.wikipedia.org/wiki/Icosahedron)-страници о икосаедру <http://en.wikipedia.org/wiki/Icosahedron> се могу наћи информације и игрицама које користе икосаедралну коцкицу.

Правилни полиедри

Листа и класификација правилних полиедара у свим димензијама се може наћи на http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_regular_polytopes#Four-dimensional_regular_polytopes Ту се може видети да поред симплекса, хиперкуба и хипероктаедра, у 4 димензије постоје још хипердодекаедар и његов дуал (600-cell) као и аутодуални политоп са 24 стране.