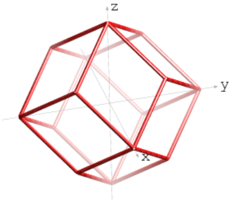
ŽIVA MATEMATIKA



Rade Živaljević

Matematički institut SANU, Beograd

Seminar o nastavi matematike i računarstva
u srednjim i osnovnim školama
Beograd 2014

Gde smo, odakle dolazimo, kuda idemo!?

- Matematika ne poznaje rasne, religijske, etničke, kulturne i geografske podele i granice. Za matematiku ceo svet je jedan i nedeljiv. (D. Hilbert)

Gde smo, odakle dolazimo, kuda idemo!?

- Matematika ne poznaje rasne, religijske, etničke, kulturne i geografske podele i granice. Za matematiku ceo svet je jedan i nedeljiv. (D. Hilbert)

- Matematika je jedini predmet, pored maternjeg jezika, koji uče svi koji su obuhvaćeni obrazovanjem. Matematika ima veliki objedinjujući potencijal (prolazi kroz države, kulture, religije).

Gde smo, odakle dolazimo, kuda idemo!?

- Matematika ne poznaje rasne, religijske, etničke, kulturne i geografske podele i granice. Za matematiku ceo svet je jedan i nedeljiv. (D. Hilbert)
- Matematika je jedini predmet, pored maternjeg jezika, koji uče svi koji su obuhvaćeni obrazovanjem. Matematika ima veliki objedinjujući potencijal (prolazi kroz države, kulture, religije).
- Projekat "Fibonacci" (EU)
  `http://www.fibonacci-project.eu/`

Gde smo, odakle dolazimo, kuda idemo!?

- Matematika ne poznaje rasne, religijske, etničke, kulturne i geografske podele i granice. Za matematiku ceo svet je jedan i nedeljiv. (D. Hilbert)
- Matematika je jedini predmet, pored maternjeg jezika, koji uče svi koji su obuhvaćeni obrazovanjem. Matematika ima veliki objedinjujući potencijal (prolazi kroz države, kulture, religije).
- Projekat "Fibonacci" (EU)
  `http://www.fibonacci-project.eu/`
- Projekat "Computer-Based Math" (Conrad Wolfram)
  `http://en.wikipedia.org/wiki/Computer-Based_Math`
  `http://www.computerbasedmath.org/`
- ......

Evropski projekat "Fibonacci"

Projekat FIBONAČI: Učenje = postavljanje pitanja (učenje je zapitkivanje)

Evropski projekat "Fibonacci"

Projekat FIBONAČI: Učenje = postavljanje pitanja (učenje je zapitkivanje)

- Inquiry based learning
  http://en.wikipedia.org/wiki/Inquiry-based_learning

Evropski projekat "Fibonacci"

Projekat FIBONAČI: Učenje = postavljanje pitanja (učenje je zapitkivanje)

- Inquiry based learning
  `http://en.wikipedia.org/wiki/Inquiry-based_learning`
- Ohrabrivanje učenika da postavljaju pitanja i na drugi način aktivno učestvuju u nastavi.

Evropski projekat "Fibonacci"

Projekat FIBONAČI: Učenje = postavljanje pitanja (učenje je zapitkivanje)

- Inquiry based learning
  `http://en.wikipedia.org/wiki/Inquiry-based_learning`
- Ohrabrivanje učenika da postavljaju pitanja i na drugi način aktivno učestvuju u nastavi.
- Metod akcentuje eksperiment, vizuelizaciju, samostalni rad ("ruka u testu", "slamka u ruci"), kritičko razmišljanje.

Evropski projekat "Fibonacci"

Projekat FIBONAČI: Učenje = postavljanje pitanja (učenje je zapitkivanje)

- Inquiry based learning
  `http://en.wikipedia.org/wiki/Inquiry-based_learning`
- Ohrabrivanje učenika da postavljaju pitanja i na drugi način aktivno učestvuju u nastavi.
- Metod akcentuje eksperiment, vizuelizaciju, samostalni rad ("ruka u testu", "slamka u ruci"), kritičko razmišljanje.
- Dinamička slika o nauci (matematici).

Evropski projekat "Fibonacci"

Projekat FIBONAČI: Učenje = postavljanje pitanja (učenje je zapitkivanje)

- Inquiry based learning
  `http://en.wikipedia.org/wiki/Inquiry-based_learning`
- Ohrabrivanje učenika da postavljaju pitanja i na drugi način aktivno učestvuju u nastavi.
- Metod akcentuje eksperiment, vizuelizaciju, samostalni rad ("ruka u testu", "slamka u ruci"), kritičko razmišljanje.
- Dinamička slika o nauci (matematici).
- Nastavnik/profesor je ekspert (kao i do sada), ali i "režiser" i "scenarist" koji dodeljuje uloge učenicima i uključuje ih u "edukativne radionice".

Evropski projekat "Fibonacci"

Ginter Cigler (Günter Ziegler)

http://fibonacci.uni-bayreuth.de/index.php?id=202

Evropski projekat "Fibonacci"

Ginter Cigler (Günter Ziegler)
`http://fibonacci.uni-bayreuth.de/index.php?id=202`

Ciljevi matematičkog obrazovanja nisu dati jednom za uvek ("pokretne mete") ali se mogu razvrstati u sledeće tri grupe:

Evropski projekat "Fibonacci"

Ginter Cigler (Günter Ziegler)
`http://fibonacci.uni-bayreuth.de/index.php?id=202`

Ciljevi matematičkog obrazovanja nisu dati jednom za uvek ("pokretne mete") ali se mogu razvrstati u sledeće tri grupe:

- Matematika kao svima dostupno sredstvo za rešavanje problema u svakodnevnom životu.

Evropski projekat "Fibonacci"

Ginter Cigler (Günter Ziegler)
`http://fibonacci.uni-bayreuth.de/index.php?id=202`

Ciljevi matematičkog obrazovanja nisu dati jednom za uvek ("pokretne mete") ali se mogu razvrstati u sledeće tri grupe:

- Matematika kao svima dostupno sredstvo za rešavanje problema u svakodnevnom životu.
- Razumevanje Matematike kao dela naše opšte kulture i kao osnove za sve ključne moderne tehnologije.

Evropski projekat "Fibonacci"

Ginter Cigler (Günter Ziegler)
`http://fibonacci.uni-bayreuth.de/index.php?id=202`

Ciljevi matematičkog obrazovanja nisu dati jednom za uvek ("pokretne mete") ali se mogu razvrstati u sledeće tri grupe:

- Matematika kao svima dostupno sredstvo za rešavanje problema u svakodnevnom životu.
- Razumevanje Matematike kao dela naše opšte kulture i kao osnove za sve ključne moderne tehnologije.
- Predstavljanje Matematike kao samog po sebi interesantnog predmeta istraživanja, kao priprema za studije matematike, tehničkih i prirodnih nauka.

Ginter Cigler

Matematika je:

Ginter Cigler

Matematika je:

- Kolekcija baznih matematičkih znanja i tehnika za snalaženje (i preživljavanje!) u savremenom životu.

Ginter Cigler

Matematika je:

- Kolekcija baznih matematičkih znanja i tehnika za snalaženje (i preživljavanje!) u savremenom životu.

  Primer: Mala zbirka "opasnih" zadataka (Zorica Marinković), `http://www.zemunskagimnazija.edu.rs/kontent/files/malaZbirkaOpasnihZadataka.pdf`

Ginter Cigler

Matematika je:

- Kolekcija baznih matematičkih znanja i tehnika za snalaženje (i preživljavanje!) u savremenom životu.

  Primer: Mala zbirka "opasnih" zadataka (Zorica Marinković), `http://www.zemunskagimnazija.edu.rs/kontent/files/malaZbirkaOpasnihZadataka.pdf`

- Oblast znanja sa najdužom istorijom, deo kulture, umetnost i veština, osnova za sve moderne ključne tehnologije.

Ginter Cigler

Matematika je:

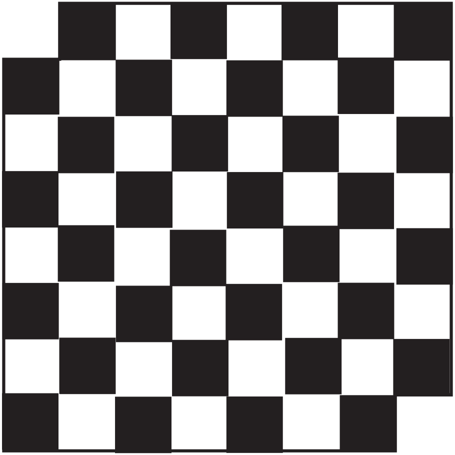
- Kolekcija baznih matematičkih znanja i tehnika za snalaženje (i preživljavanje!) u savremenom životu.

  Primer: Mala zbirka "opasnih" zadataka (Zorica Marinković), `http://www.zemunskagimnazija.edu.rs/kontent/files/malaZbirkaOpasnihZadataka.pdf`

- Oblast znanja sa najdužom istorijom, deo kulture, umetnost i veština, osnova za sve moderne ključne tehnologije.

- Visoko razvijena, aktivna naučna disciplina sa ogromnim brojem istraživačkih tema.

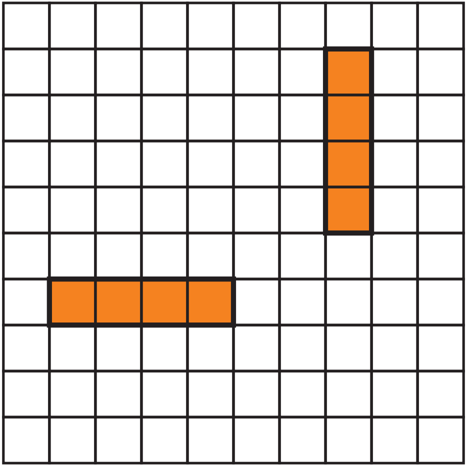
Šahovska ploča bez dva polja



Da li je moguće šahovsku tablu bez dva ugaona polja popločati dominama!?

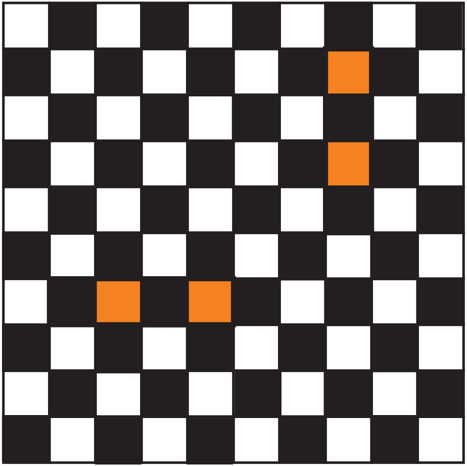
Popločavanje 10×10 *šahovske table*

Da li se 10×10 šahovska tabla može popločati poliominama tipa 1×4 i 4×1?



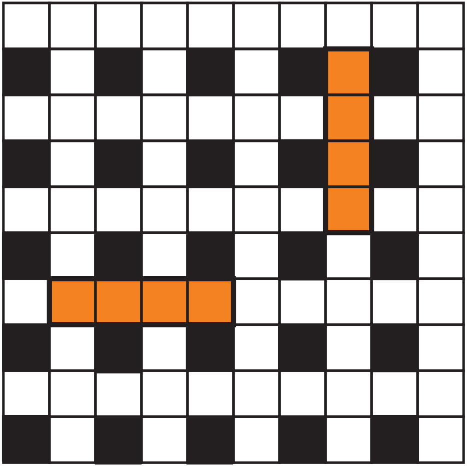
Popločavanje 10×10 *šahovske table*

Da li se 10×10 šahovska tabla može popločati poliominama tipa 1×4 i 4×1?



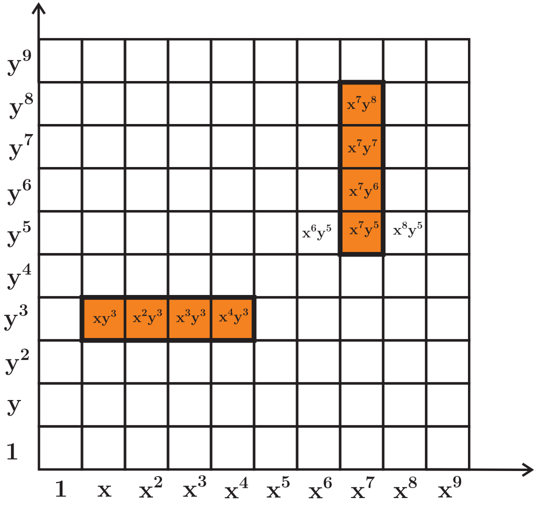
Popločavanje 10×10 *šahovske table*

Da li se 10×10 šahovska tabla može popločati poliominama tipa 1×4 i 4×1?



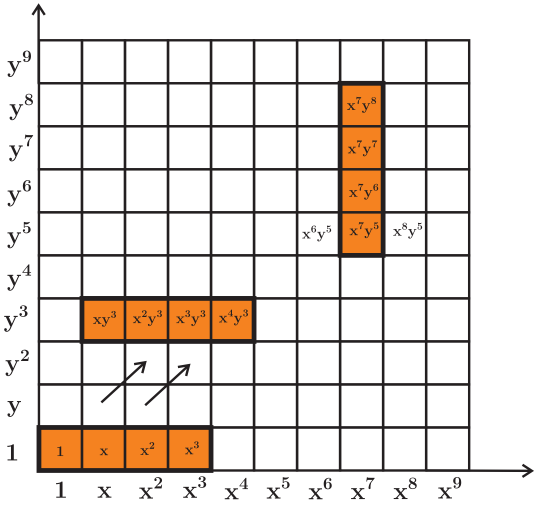
Popločavanje 10×10 *šahovske table*

Svakom šahovskom polju dodeljujemo odgovarajući monom.



Popločavanje 10×10 *šahovske table*

$$xy^3 + x^2y^4 + x^3y^5 + x^4y^6 = xy^3(1 + x + x^2 + x^3)$$



Pozivamo Miss Algebru *u pomoć*

Zaključak: 10×10 šahovska tabla se može popločati poliomino pločicama tipa (1×4) i (4×1) ako i samo postoje polinomi $p(x, y)$ i $q(x, y)$ sa celim, nenegativnim koeficientima takvi da je

$$p(x,y)(1+x+x^2+x^3)+q(x,y)(1+y+y^2+y^3) = (1+x+\ldots+x^9)(1+y+\ldots+y^9)$$

Pozivamo Miss Algebru *u pomoć*

Zaključak: 10×10 šahovska tabla se može popločati poliomino pločicama tipa (1×4) i (4×1) ako i samo postoje polinomi $p(x,y)$ i $q(x,y)$ sa celim, nenegativnim koeficientima takvi da je

$$p(x,y)(1+x+x^2+x^3)+q(x,y)(1+y+y^2+y^3) = (1+x+\ldots+x^9)(1+y+\ldots+y^9)$$

Opštije, ako se pločicama oblika $P_1, P_2, \ldots, P_k$ želi pokriti neki skup šahovskih polja P (koji igra ulogu šahovske table) to će biti moguće ako i samo ako postoje polinomi $q_1, q_2, \ldots, q_k \in \mathbb{Z}^+[x,y]$ takvi da je

$$q_1 f_{P_1} + \ldots q_k f_{P_k} = f_P.$$

Pozivamo Miss Algebru *u pomoć*

Zaključak: 10×10 šahovska tabla se može popločati poliomino pločicama tipa (1×4) i (4×1) ako i samo postoje polinomi $p(x, y)$ i $q(x, y)$ sa celim, nenegativnim koeficientima takvi da je

$$p(x,y)(1+x+x^2+x^3)+q(x,y)(1+y+y^2+y^3) = (1+x+\ldots+x^9)(1+y+\ldots+y^9)$$

Opštije, ako se pločicama oblika $P_1, P_2, \ldots, P_k$ želi pokriti neki skup šahovskih polja P (koji igra ulogu šahovske table) to će biti moguće ako i samo ako postoje polinomi $q_1, q_2, \ldots, q_k \in \mathbb{Z}^+[x, y]$ takvi da je

$$q_1 f_{P_1} + \ldots q_k f_{P_k} = f_P.$$

Po definiciji za svaku pločicu X definišemo f_X kao sumu svih monoma pokrivenih sa X (pri tome uvek pozicioniramo pločicu da bude što bliže koordinatnom početku, ostajući u prvom kvadrantu celobrojen rešetke).

Pozivamo Miss Algebru *u pomoć*

Relacija,

$$p(x,y)(1+x+x^2+x^3)+q(x,y)(1+y+y^2+y^3) = (1+x+\ldots+x^9)(1+y+\ldots+y^9)$$

nije moguća, čak i ako su p i q bilo kakvi polinomi sa celim koeficientima.

Pozivamo Miss Algebru *u pomoć*

Relacija,

$$p(x,y)(1+x+x^2+x^3)+q(x,y)(1+y+y^2+y^3) = (1+x+\ldots+x^9)(1+y+\ldots+y^9)$$

nije moguća, čak i ako su p i q bilo kakvi polinomi sa celim koeficientima.

Zaista ako je $x = y = i = \sqrt{-1}$ onda je leva strana 0 a desna ima vrednost $i^2 = -1$.

Pozivamo Miss Algebru *u pomoć*

Relacija,

$$p(x,y)(1+x+x^2+x^3)+q(x,y)(1+y+y^2+y^3) = (1+x+\ldots+x^9)(1+y+\ldots+y^9)$$

nije moguća, čak i ako su p i q bilo kakvi polinomi sa celim koeficientima.

Zaista ako je $x = y = i = \sqrt{-1}$ onda je leva strana 0 a desna ima vrednost $i^2 = -1$.

Bojenje: Ako je $1 + x + x^2 + x^3 = 1 + y + y^2 + y^3 = 0$ onda je $x^4 = y^4 = 1$ i desna strana svodi na $(1 + x)(1 + y)$. Umesto kompleksnih brojeva dovoljno je naći prsten ostataka po modulu p u kome važi $x^4 = 1$ i $(1 + x)^2 \neq 0$. To važi npr. ako je $p = 5$ i $x = y = 2$. U ovom slučaju je $x^i y^j = 2^{i+j}$ i (po modulu 5),

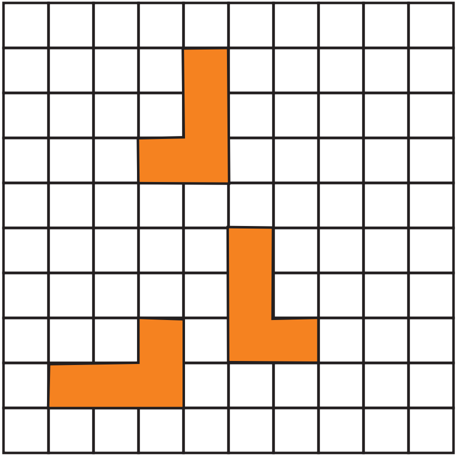
$$2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 3, \quad 2^4 = 1, \quad \text{itd.}$$

Još jedno bojenje šahovske table 10×10

2	4	3	1	2	4	3	1	2	4
1	2	4	3	1	2	4	3	1	2
3	1	2	4	3	1	2	4	3	1
4	3	1	2	4	3	1	2	4	3
2	4	3	1	2	4	3	1	2	4
1	2	4	3	1	2	4	3	1	2
3	1	2	4	3	1	2	4	3	1
4	3	1	2	4	3	1	2	4	3
2	4	3	1	2	4	3	1	2	4
1	2	4	3	1	2	4	3	1	2

"Konjićev skok" popločavanja

Da li je moguće popločavanje 10×10 šahovske table pločicama tipa "konjićev skok"?



Algebra "Konjićev skok" popločavanja

Ima tačno 8 tipova konjićevog skoka kojima odgovaraju polinomi,

Algebra "Konjićev skok" popločavanja

Ima tačno 8 tipova konjićevog skoka kojima odgovaraju polinomi,

$$f_1 = 1+x+x^2+y,\ f_2 = 1+x+x^2+x^2y,\ f_3 = 1+y+xy+x^2y,\ f_4 = x^2+y+xy+x^2y$$

$$f_5 = 1+x+y+y^2,\ f_6 = 1+x+xy+xy^2,\ f_7 = 1+y+y^2+xy^2,\ f_8 = y^2+x+xy+xy^2.$$

Algebra "Konjićev skok" popločavanja

Ima tačno 8 tipova konjićevog skoka kojima odgovaraju polinomi,

$f_1 = 1+x+x^2+y$, $f_2 = 1+x+x^2+x^2y$, $f_3 = 1+y+xy+x^2y$, $f_4 = x^2+y+xy+x^2y$

$f_5 = 1+x+y+y^2$, $f_6 = 1+x+xy+xy^2$, $f_7 = 1+y+y^2+xy^2$, $f_8 = y^2+x+xy+xy^2$.

Postavljeni problem se svodi na pitanje da li postoje polinomi $p_1, p_2, \ldots, p_8$ (sa celim pozitivnim koeficientima) takvi da je,

$$p_1 f_1 + p_2 f_2 + \ldots + p_8 f_8 = Q$$

gde je $Q = (1 + x + \ldots + x^9)(1 + y + \ldots + y^9)$.

Račun za "Konjićev skok" popločavanje

Potražimo vrednosti za x i y kao brojeve u računu ostataka po modulu (za sada) nepoznatog broja m.

Račun za "Konjićev skok" popločavanje

Potražimo vrednosti za x i y kao brojeve u računu ostataka po modulu (za sada) nepoznatog broja m.

Pošto je $f_1 - f_2 = y(x^2 - 1) = 0$ najjednostavniji izbor je $x = 1$. Iz uslova $f_1 = 0$ dobijamo $y = -3$.

Račun za "Konjićev skok" popločavanje

Potražimo vrednosti za x i y kao brojeve u računu ostataka po modulu (za sada) nepoznatog broja m.

Pošto je $f_1 - f_2 = y(x^2 - 1) = 0$ najjednostavniji izbor je $x = 1$. Iz uslova $f_1 = 0$ dobijamo $y = -3$.

Već znamo da je $f_2 = 0$ a vrednosti ostalih polinoma su:

$$f_3 = f_4 = -8, \quad f_5 = f_6 = 8, \quad f_7 = f_8 = -16.$$

Račun za "Konjićev skok" popločavanje

Potražimo vrednosti za x i y kao brojeve u računu ostataka po modulu (za sada) nepoznatog broja m.

Pošto je $f_1 - f_2 = y(x^2 - 1) = 0$ najjednostavniji izbor je $x = 1$. Iz uslova $f_1 = 0$ dobijamo $y = -3$.

Već znamo da je $f_2 = 0$ a vrednosti ostalih polinoma su:

$$f_3 = f_4 = -8, \quad f_5 = f_6 = 8, \quad f_7 = f_8 = -16.$$

Dakle ako je $m = 8$ i $x = 1, y = -3 = 5$ svi polinomi koji odgovaraju konjićevim skokovima se anuliraju.

Račun za "Konjićev skok" popločavanje

Potražimo vrednosti za x i y kao brojeve u računu ostataka po modulu (za sada) nepoznatog broja m.

Pošto je $f_1 - f_2 = y(x^2 - 1) = 0$ najjednostavniji izbor je $x = 1$. Iz uslova $f_1 = 0$ dobijamo $y = -3$.

Već znamo da je $f_2 = 0$ a vrednosti ostalih polinoma su:

$$f_3 = f_4 = -8, \quad f_5 = f_6 = 8, \quad f_7 = f_8 = -16.$$

Dakle ako je $m = 8$ i $x = 1, y = -3 = 5$ svi polinomi koji odgovaraju konjićevim skokovima se anuliraju.

Traženo popločavanje nije moguće jer je,

$$Q = 10(1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^9) =_{\mathrm{mod}8} 4 \neq 0$$

Bojenje za "Konjićev skok" popločavanje

Lako se vidi da $x^i y^j$ uzima vrednost 1 ako je j paran i vrednost 5 ako je j neparan broj. Odavde se dobija bojenje koje dokazuje nemogućnost "konjićev skok" popločavanja table 10×10.

5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1