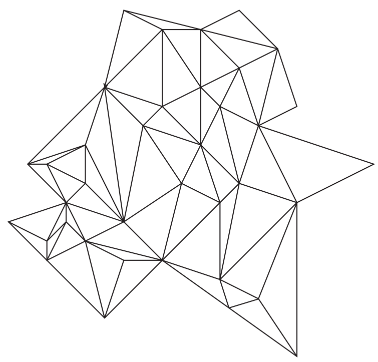
– ШПЕРНЕРОВА ЛЕМА –
ИЛИ ПОГЛЕД У СВЕТ ТРОУГЛОВА

Раде Живаљевић,
Математички институт САНУ

„Становници“ државе *Равније* се према свом социјалном и имовинском статусу деле на *троуглове, четвороуглове, петоуглове* па све до социјално најугледнијих и најутицајнијих полигона из „виших класа“ који, разуме се, поседују и највећи број страна. *Равнију* (или *Равнођију*) не треба бркати са *Низоземском* као ни са *Сједињеним Уравњеним Државама* (С.У.Д.), иако је дводимензионални карактер свих ових земаља јасно видљив у њиховим именима.

Поглед у државно устројство[1] и социјалну пирамиду Равније показује да троуглови раде најтеже и најмање цењене послове као и да, иако разноврсни и многобројни, не могу очекивати озбиљнију друштвену промоцију.



Слика 1: Триангулација = „колонија“ троуглова

Равнија је ипак само један од могућих светова. У нашем тродимензионалном свету троуглови играју изузетно важну улогу и наш чланак је у неком смислу похвала троуглу и његовој способности да гради и описује све или готово све сложене геометријске објекте. Заиста, троугао, односно његови вишедимензионални сродници (тетраедар у 3 и d-симплекс у d димензија), незамењиви су у најсложнијим компјутерским играма и анимацијама, у индустријском дизајну уз помоћ рачунара, у свим математичким дисциплинама које баратају геометријским фигурама и облицима, специјално у *дискретној и рачунарској геометрији и топологији.*

1 Триангулације, симплекси и комплекси

Разлагање геометријске фигуре на троуглове у којима троуглови лепо належу један на други својим страницама назива се **триангулација**. Пример једне триангулације дат је на Слици 1. Појам триангулације је толико јасан и прозрачан да је у многим случајевима корисно сваку другу геометријску форму или облик разбити на троуглове. Обрнуто, троуглови слепљивањем дуж својих ивица могу формирати врло сложене облике, тзв. **комплексе**. Сама реч „комплекс“указује на то да је то нешто сложено (комплексно!). Сам троугао, који је градивни елемент сваког

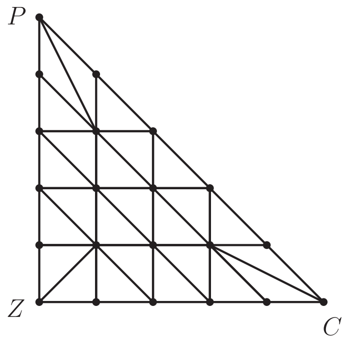
[1] Edwin A. Abbott, *Flatland*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Flatland`

комплекса је једноставан па је познат и под именом **симплекс**. Прецизније речено, троугао је 2-димензионални симплекс, свака дуж је 1-димензионални симплекс, тетраедар је 3-димензионални симплекс, итд. а заједничко име симплекс указује на то да су то најједноставнији градивни елементи за изградњу сложених форми или (симплицијалних) комплекса.

2 Шпернерова лема

На недавно одржаној *Првој Српској математичкој олимпијади* (`http://www.dms.org.yu/`), појавио се и следећи задатак.

Задатак 1: Троугао $\triangle ZCP$ подељен је на 25 малих троуглова (Слика 2), а затим су сва темена тих троуглова обојена са три боје на следећи начин. Теме Z је обојено зеленом бојом, теме C црвеном, а теме P плавом. Свако од темена на дужи ZC обојено је или зеленом или црвеном бојом, свако од темена на дужи CP обојено је или црвеном или плавом бојом, а свако од темена на дужи ZP обојено је или зеленом или плавом бојом. Сва темена која се налазе у унутрашњости троугла обојена су без рестрикција, једном од три боје. Доказати да без обзира на начин бојења, бар један од 25 малих троуглова има сва три темена различите боје.



Слика 2:

У овом задатку је реч дакле о једној триангулацији троугла у којој су темена свих малих троуглова обојена са три боје. При томе су задовољени неки услови који прецизирају које боје могу бити тачке (темена) која се налазе на страницама троугла. Циљ је пронаћи, или доказати да постоји, мали троугао чија су темена обојена са све три боје.

Овај задатак је специјалан случај такозване **Шпернерове леме** (теореме), веома познатог тврђења које припада области комбинаторне топологије. Сасвим прецизно, Шпернерова лема каже да се *разнобојни троугао*, тј. троугао чија су темена обојена са све три боје, мора појавити у свакој *Шпернеровој триангулацији* троугла, тј. триангулацији која задовољава исте граничне услове као и триангулација у Задатку 1.

3 Уопштење

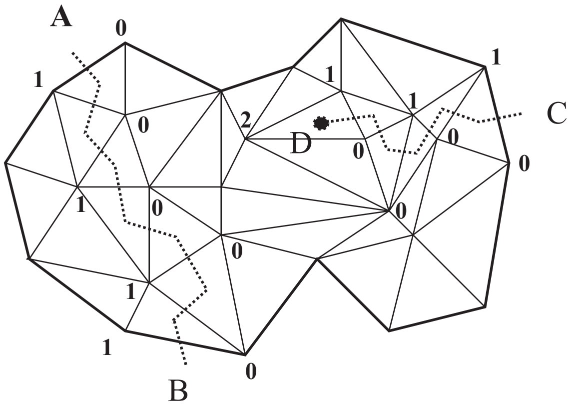
Некада је општији и на први поглед тежи проблем лакше решити од оригиналног задатка. Лакше нам је да уочимо кључне идеје које немају где да се сакрију иза шуме небитних детаља који одвлаче пажњу. У сагласности са овим принципом, поставимо општији задатак.

Задатак 2: Пођимо од триангулације неког (правилног или неправилног) геометријског објекта. Обојимо сва темена, свих троуглова са три боје P, Z, C (или још прегледније искористимо бројеве

$0, 1, 2)$. Задатак је да се пронађу што општији услови који ће гарантовати појаву разнобојног троугла, односно троугла чија су темена означена са сва три броја (боје) $0, 1, 2$.

4 Стратегија

Како наћи разнобојни троугао у некој (обојеној) триангулацији, нпр. у триангулацији приказаној на Слици 3? Идеја је проста! Изаберимо (било где на слици) дуж чији су крајеви означени бројевима 0 и 1, односно дуж чији су крајеви обојени са две изабране од три задате боје. Претпоставимо на пример да је то једна од дужи која се налази на граници наше фигуре, на пример дуж која је најближа тачки **A**.



Слика 3: Путовање кроз замак са троугластим собама

Замислимо за тренутак да смо становник *Равније* и да је Слика 3 заправо план неког замка или лавиринта са великим бројем троугластих соба. Замислимо да врата постоје само на зидовима (дужима) чији су крајеви означени бројевима 0 и 1.

Храбро закорачимо из тачке **A** кроз $\overline{01}$-врата пред нама. Нашли смо се у троугаоној соби. Ако је треће теме те собе означено бројем 2, једна $\overline{012}$-соба је пронађена и циљ је постигнут. У супротном то теме је означено једним од бројева 0 или 1 (на Слици 3 то је број 0). Појавила су се пред нама нова $\overline{01}$-врата и ми настављамо путовање.

Могућа су два сценарија. Или ћемо се после неколико корака наћи у „соби са благом“, тј. троугаоној соби са теменима означеним свим бројевима $0, 1, 2$; или ћемо кад тад изаћи из замка. Први случај се на Слици 3 остварује када путовање започне из тачке **C**. Другом случају одговара путовање из тачке **A** у тачку **B**.

5 Непарност броја граничних $\overline{01}$-врата

Из претходне анализе следи неколико врло интересантних закључака. Путовање које започиње уласком у нека од $\overline{01}$-врата на граници триангулисане фигуре или води право у $\overline{012}$-труогао, или напоље из замка кроз нека друга $\overline{01}$-врата. Приметимо да се разне путање никада не секу (заиста у свакој троугаоној соби или уопште нема или постоје тачно двоја $\overline{01}$-врата). Одавде непосредно добијамо један критеријум (довољан услов) за постојање разнобојних или $\overline{012}$-троуглова а тиме и једно решење Задатка 2.

Критеријум (непарност броја граничних $\overline{01}$-врата $\longrightarrow$ постоји $\overline{012}$-троугао)**:** Претпоставимо да су сва темена свих троуглова наше триангулисане геометријске фигуре означена бројевима $0, 1, 2$ тако да је број граничних $\overline{01}$-дужи (тј. спољних $\overline{01}$-врата) непаран. Тада обавезно мора постојати бар један (тачније непаран број!) $\overline{012}$-троуглова, тј. троуглова чија су темена означена свим бројевима $0, 1, 2$.

Заиста, када $\overline{012}$-троуглова не би било, онда би свака улазна $\overline{01}$-врата водила до других (излазних) $\overline{01}$-врата. Тиме би се сва улазно-излазна $\overline{01}$-врата са границе наше фигуре разврстала у парове па би њихов број морао бити паран, што је супротно претпоставци!

Решење Задатка 1: Изаберимо било који пар боја (нпр. боје Z и C), прогласимо их бојама 0 и 1 и покажимо да из наведених услова следи да број граничних $\overline{01}$-дужи мора бити непаран. Заиста, овакве дужи се могу наћи само на страници ZC нашег троугла. Пошто је теме Z означено бројем 0 а теме C бројем 1, остаје да се провери следеће једноставно тврђење чији доказ препуштамо читаоцу.

Задатак 3: Дуж AB је подељена на неколико мањих дужи. Тачка A је означена бројем 0, тачка B бројем 1, а све остале деоне тачке су на произвољан начин означене једним од бројева 0 или 1. Доказати да је број $\overline{01}$-дужи (мањих дужи чији су крајеви означени са оба броја 0 и 1) увек непаран.

6 Шта кажу мудри математичари

Гељфанд, Израел Мојсејевич каже, а са њим се значајно климајући главом саглашавају William Thurston, Арнолд Владимир Игоревич, George Polýa, као и сви учесници београдског ЦГТА-семинара за студенте од 7 до 77 година, да је размишљање о већ решеним задацима један од значајнијих начина да се постигне висок степен разумевања математике. Ако је то тако ево неколико тема за размишљање о Шпернеровој леми и њеним сродницима.

1. Претпоставимо да сте се нашли у некој $\overline{012}$-соби и да желите да изађете из замка који личи на онај приказан на Слици 3. Да ли је то увек могуће учинити, тј. да ли из сваке $\overline{012}$-собе путања кроз одговарајућа $\overline{01}$-врата води напоље из замка!?

2. Да ли критеријум о непарности броја „граничних $\overline{01}$-страна“, у истој или модификованој форми, остаје на снази и код бојења било каквих триангулација укључујући и триангулације разних полигоналних области (укључујући и оне са рупама), триангулација сфере, торуса и других површи (са или без границе), и коначно $\{0, 1, 2\}$-бојења било каквих 2-димензионалних симплицијалних комплекса!?

3. Формулисати и доказати тродимензионалну верзију Шпернерове леме (о егзистеницији $\overline{0123}$-тетраедра), уз помоћ одговарајућег критеријума о „непарности броја $\overline{012}$-троуглова“.

4. Наоружани критеријумом о непарности граничних $\overline{01}$-врата прошетати интернетом у потрази за новим изазовима! Нпр. откуцати “Sperner's lemma” у интернет претраживачу “Google” и следити неке од путања, нпр.
`http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/SpernerLemma.shtml`
`http://planetmath.org/encyclopedia/SpernersLemma.html`
`http://www.nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=1383&part=index&theme=jungle&`

5. Погледати (када се појави) филм “Flatland”, (`http://www.flatlandthefilm.com/`).

– ШПЕРНЕРОВА ЛЕМА –
ИЛИ ПОГЛЕД У СВЕТ 2-АДИЧНИХ БРОЈЕВА

Раде Живаљевић,
Математички институт САНУ

Свет 2-адичних бројева је потпуно другачији од света триангулација о коме је била реч у претходном чланку (Тангента бр. 48/4). У овом наставку показаћемо како их на неочекиван и тајанствен начин повезује Шпернерова лема. Наш непосредан циљ је решење следећег, наоко једноставног задатка.

Задатак 1: Квадрат је подељен на троуглове једнаких површина. Доказати да број троуглова у овој подели (триангулацији) мора бити паран.

Лако се уверавамо да се квадрат може поделити на 2, 4, 6 и уопште на сваки паран број троуглова једнаке површине. Takође брзо увиђамо да нам таква подела на непаран број троуглова никако не полази за руком. Зашто је то тако!? Искрено речено не знам одговор, али наставимо причу и завиримо у свет 2-адичних бројева који ће нам помоћи да дођемо до решења.

1 Свет 2-адичних бројева

Увређено је мишљење да су разломци веома трезвена и разумна бића, уосталом отуда (вероватно) и долази њихово име рационални бројеви. Међу разломцима се тачно зна шта је ред, зна се да је $3/2 < 2^5$ и да је $-5\frac{1}{3} < \frac{7}{2}$, зна се ко је позитиван ко је негативан, зна се ко је са ким дељив и од кога се могу очекивати овакви или онакви остаци при дељењу са 9 или са 11. Међу разломцима су посебно угледни природни бројеви, а међу њима се још од времена старих Грка издвајају троугаони, четвороугаони (квадратни), петоугаони, и уопште полигонални бројеви, што наговештава извесну духовну везу ових бројева са полигоналним светом *Равније*.

На опште изненађење, међу разломцима се једнога дана на мистериозан начин проширила чудна мода која је пореметила многе дотадашње јасне и свима очигледне односе. Укратко, сви разломци су као по команди пожелели да што више личе на чланове угледне породице степена двојке $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots$, и изненада су дељивост са што већим степеном броја 2 ставили на сам почетак пожељних особина које би требало да има сваки успешан рационалан број. Ово је наравно произвело општу пометњу и препирку међу бројевима. Све се на срећу убрзо разрешило (као што је и ред међу рационалним бићима) и то на следећи начин. На оснивачкој скупштини је усвојена ***Оснивачка повеља** 2-**адичног света*** којом су прецизирана нова правила понашања и односи међу разломцима. Најважнија новост био је закон којим је апсолутна вредност $|x|$ рационалног броја x стављена ван снаге и замењена новом, 2-адичном апсолутном вредношћу $|x|_2$.

Познато нам је да се сваки разломак $x = \frac{p}{q}$ може записати као производ $x = \frac{p}{q} = 2^m \cdot \frac{a}{b}$ неког степена двојке 2^m и разломка $\frac{a}{b}$ где су a и b цели бројеви који нису дељиви са 2. На пример $\frac{140}{27} = 2^2 \cdot \frac{35}{27}$, $\frac{-5}{56} = 2^{-3} \cdot \frac{-5}{7}$ итд. Назовимо број $2^m = \{\frac{p}{q}\}_2$, 2-адичним делом разломка $\frac{p}{q}$, нпр. $\{\frac{140}{27}\}_2 = 2^2, \{\frac{-5}{56}\}_2 = 2^{-3}, \{1\}_2 = 2^0 = 1$. Још важнија је реципрочна вредност $|\frac{p}{q}|_2 = \{\frac{p}{q}\}_2^{-1}$, 2-адичног дела разломка $\frac{p}{q}$ која се и помиње у оснивачком документу 2-адичног света.

Оснивачка повеља 2-адичног света: Сваком рационалном броју $x = \frac{p}{q} = 2^m \cdot \frac{a}{b}$ додељује се величина $|x|_2 := 2^{-m}$ коју називамо 2-адична норма или 2-адична апсолутна вредност рационалног броја x. По дефиницији $|0|_2 = 0$. Величина $|x|_2$ замењује апсолутну вредност $|x|$ у свим изразима у којима се мери растојање, нпр. уместо $|x - y|$ као мера разликовања (удаљености) бројева x и y узима се величина $|x - y|_2$.

2 Живот у 2-адичном свету

Последице замене уобичајене апсолутне вредности $|x|$ новом 2-нормом $|x|_2$ биле су моменталне и драматичне. Бројеви који су једва и знали један за другог, као на пример уважени трећи степен $3^3 = 27$ и елегантни квадрат $11^2 = 121$, постали су „први суседи“. Заиста, њихова ранија удаљеност $|121 - 27| = 94$, при новом рачунању удаљености, свела се на $|121 - 27|_2 = |94|_2 = |2|_2 = \frac{1}{2}$! Бројеви, као нпр. низ $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$, који су се, постајући све већи, удаљавали ка бесконачности, одједанпут су се, постајући све мањи, почели приближавати нули. Бројеви, као нпр. низ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$, који су се раније у метрици заданој уобичајеном апсолутном вредношћу приближавали 0, одједанпут су почели „дивље“да осцилују. Бесконачне суме (редови), као нпр. бесконачни геометријски ред

$$(1) \qquad 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n + \ldots$$

који се раније нису могли сумирати (њихов збир је био бесконачан!) сада су се лако могли сабрати. Заиста, формула

$$(2) \qquad a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^n + \ldots = \frac{a_1}{1 - q}$$

која важи ако је $|q| < 1$ и сада остаје на снази али под условом $|q|_2 < 1$. Пошто је $|2|_2 = \frac{1}{2} < 1$, закључујемо да је формула (2) примењива на случај геометријског реда (1) као и да је његов збир $\frac{1}{1-2} = -1$!

На свој ужас, становници 2-адичног света установише да је „збир“бесконачног низа позитивних бројева једнак негативном броју (броју -1)! Наступи велика смутња, пометња и малодушност. „Раније је било боље“, јавише се неки. „Доле са степенима двојке“, придружише им се други. Наступи опште узнемирење и несигурност али поново, као што и приличи рационалним бићима, становници 2-адичног света нађоше решење и донесоше:

Први амандман оснивачкој повељи 2-адичног света: Укида се свако позивање на релацију поретка „$<$“, као и апеловање на „позитивност“или „негативност“неког рационалног броја. Напушта се линеарни поредак међу бројевима као нешто неприлично и непримерено слободним становницима 2-адичног света.

Хармонија поново завлада 2-адичним универзумом а бројеви-научници пођоше у истраживање свог новог света. Мало по мало појавише се интересатни идентитети и релације (покушајте да проверите неке од њих) међу њима и следећи:

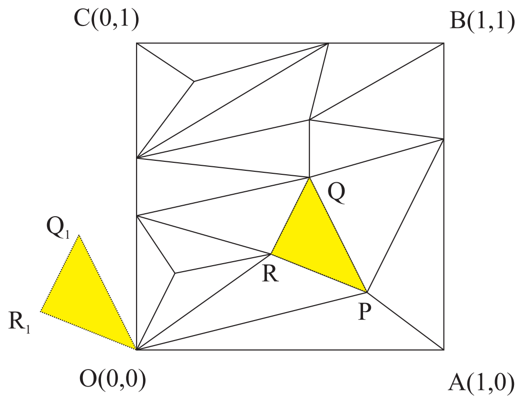
$$(3) \qquad \begin{array}{ll} |-x|_2 = |x|_2 & |x \cdot y|_2 = |x|_2 \cdot |y|_2 \\[2ex] |x + y|_2 \leq \max\{|x|_2, |y|_2\} & |x + y|_2 = |x|_2 \text{ ако је } |x|_2 > |y|_2 \end{array}$$

3 Шпернерова лема и 2-адична раван

Све је то лепо и маштовито, рећи ће неки, али каква је стварна веза 2-адичних бројева са Задатком 1 и дељењем квадрата на троуглове једнаких површина. Пођимо од првог, и на први поглед наивног објашњења. Претпоставимо да је квадрат подељен на n троуглова једнаких површина одакле следи да је површина сваког од тих троуглова $P = \frac{1}{n}$. Решићемо задатак ако докажемо да је n обавезно паран број или другим речима ако докажемо да је $|n|_2 < 1$, тј. да је $|P|_2 > 1$. Лепо, али како доказати последњу неједнакост, не дају се скептици? Шта добијамо ако услов парности заменимо мање прегледном неједнакошћу $|P|_2 > 1$? Одговор се крије у неочекиваној примени Шпернерове леме!

Решење задатка (случај рационалних темена)**:** Ставимо квадрат у координатни систем тако да су његова темена тачке са координатама $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$, видети Слику 4. Замислимо да је тај квадрат триангулисан на n троуглова једнаких површина.

Важна допунска претпоставка: Претпоставимо да су координате свих врхова свих троуглова рационални бројеви! Ова претпоставка није неопходна (видети крај чланка) али је врло згодна јер нам омогућује да суштину доказа изложимо на најбржи и најпрегледнији начин.



Слика 4:

Имајући у виду Шпернерову лему, свакој тачки $T(x,y)$ у равни са обе рационалне координате, $x, y \in \mathbb{Q}$, доделимо ознаку $\Omega_T = \Omega_{(x,y)} \in \{0,1,2\}$, сагласно следећем правилу.

$$\Omega_{(x,y)} = \begin{cases} 0 & \text{ако је } |x|_2 < 1 \text{ и } |y|_2 < 1 \\ 1 & \text{ако је } |x|_2 \geq 1 \text{ и } |x|_2 \geq |y|_2 \\ 2 & \text{ако је } |y|_2 \geq 1 \text{ и } |y|_2 > |x|_2 \end{cases} \tag{4}$$

Одавде следи да је увек

$$\Omega_{(x,0)} \in \{0,1\}, \quad \Omega_{(1,y)} \in \{1,2\}, \quad \Omega_{(x,1)} \in \{1,2\}, \quad \Omega_{(x,0)} \in \{0,2\},$$

као и да су ознаке врхова нашег квадрата $\Omega_{(0,0)} = 0, \Omega_{(1,0)} = 1, \Omega_{(1,1)} = 1, \Omega_{(0,1)} = 2$. Закључујемо да се $\overline{01}$-дужи на граници квадрата могу јавити само на x-оси, тј. на његовој страни OA. Поред тога, с обзиром да је $\Omega_O = 0$ и $\Omega_A = 1$, видимо да је број граничних $\overline{01}$-дужи непаран, дакле према критеријуму из претходног чланка о Шпернеровој леми, постоји $\overline{012}$-троугао у датој триангулацији. Означимо са P, Q, R темена тог троугла при чему претпостављамо да је

$\Omega_P = 0, \Omega_Q = 1, \Omega_R = 2$. Следеће тврђење се лако дедукује из последње од четири релације у (3) и дефиниције означавања (4).

Тврђење: Ознака $\Omega_M = \Omega_{(x,y)}$ било које тачке $M(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ се не мења ако се M транслаторно помери за вектор $\overrightarrow{ON}$ где је O координатни почетак и N тачка чија је ознака нула, $\Omega_N = 0$.

Померимо транслаторно троугао PQR за вектор $-\overrightarrow{OP}$, тј. тако да му теме P пређе у координатни почетак; при томе теме Q прелази у теме $Q_1 = Q_1(x_1, x_2)$ а теме R у теме $R_1 = R_1(y_1, y_2)$ (видети Слику 4). Пошто је $\Omega_P = \Omega_{-P} = 0$, закључујемо да је $\Omega_{Q_1} = 1$ и $\Omega_{R_1} = 2$. Према добро познатој формули, површина P_{PQR} троугла PQR је

$$P = P_{PQR} = P_{OQ_1R_1} = \tfrac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|.$$

Одавде је

$$|P|_2 = |\tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)|_2 = |\tfrac{1}{2}|_2 \cdot |x_1y_2 - x_2y_1|_2 = 2|x_1y_2|_2 \geqslant 2 > 1$$

при чему смо поново користили последњу релацију из (3) као и чињеницу да је $|x_1y_2|_2 > |x_2y_1|_2$ која је дедукована из (4) коришћењем једнакости $\Omega_{Q_1} = 1$ и $\Omega_{R_1} = 2$. Дакле, као што је и обећано, $|n|_2 = |1/P|_2 < 1$ одакле следи да је n паран број.

4 Коментари и информације

Џон Томас (John Thomas, A dissection problem, Math. Mag., 41 (1968) 187-190), први је приметио да се особине 2-адичне норме $|x|_2$, у садејству са Шпернеровом лемом, могу искористити за решење проблема дељења квадрата на троуглове једнаких површина. Наша презентација се базира на Томасовим идејама. Пол Монски (Pol Monsky, On dividing a square into triangles, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 161-164), показао је како се претпоставка о рационалности координата темена троуглова може избећи.

За сваки прост број p се на сличан начин као и у случају $p = 2$ дефинише одговарајућа p-адична норма $|x|_p$ што значи да за сваки прост број p постоји и одговарајући p-адични „свет“. Коришћењем p-адичних норми и генералне, d-димензионалне Шпернерове леме (D.G. Mead, Dissection of the hypercube into simplexes, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 76, No. 2 (1979), 302-304), може се доказати да је подела d-димензионалног куба на симплексе једнаких (хипер)волумена могућа ако и само ако је њихов број дељив са $d! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot d$. Специјално за $d = 3$, добија се да се коцка може поделити на тетраедре истих запремина ако и само ако је број ових тетраедара дељив са $3! = 6$.

Ево и неколико занимљивих www-адреса:

http://en.wikipedia.org/wiki/P-adic_number
http://www.maths.gla.ac.uk/~ajb/dvi-ps/padicnotes.pdf
http://www.secamlocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/physics7.htm
http://www.p-adic-mathphys2005.phy.bg.ac.yu/
http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/556/