Да ли нам је тесно у три димензије!?

Раде Т. Живаљевић
Математички институт САНУ, Београд

Тесно нам може бити у малом стану, у новим ципелама или оделу. Тесна је рукавица, чарапа, тесна може бити и победа. Тесно нам је у аутобусу, у држави, у сопственој кожи.

Али, да ли нам и цео бескрајни простор који нас окружује може бити тесан!? Уосталом шта то значи да нам је простор тесан?

Разумемо да је тесно у једнодимензионалном простору. Поучна прича из читанки о два јарца на брвну који јуришају један на другог, заправо нас учи да је тесно у једној димензији где се две особе не могу чак ни мимоићи. Неко ће можда додати да је то и метафора о судару два супротстављена „једнодимензионална“ мишљења.

Није увек лако ни у две димензије. Ту се две особе могу лако мимоићи али се „тесноћа простора“ манифестује на други, суптилнији начин. Познато је на пример да се три куће не могу повезати путевима са три бунара а да се путеви нигде не пресеку. Стручно речено, *комплетни бипартитни граф* $K_{3,3}$ није *планаран*. Наравно проблем нестаје у три димензије јер тамо можемо лако избећи пресецање путева прављењем надвожњака и подвожњака.

Покушајмо да сагледамо појаве које се могу објаснити као манифестације феномена да ни три димензије понекада нису довољне. На том путу срешћемо и чувену *Бојову површ* (Boy's surface), коју видите на насловној страни, али и понудити решење проблема са корица Тангенте из претходног броја.

1 Светови од папира

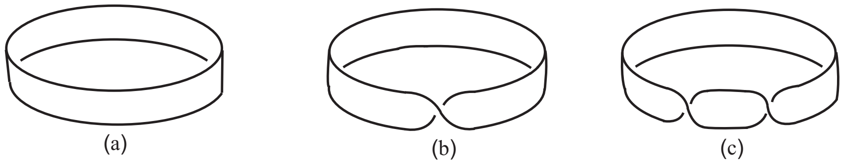
Мебијусова трака је једна од најатрактивнијих икада измишљених математичких „играчки“ за кућну употребу. Узмете правоугони лист папира, залепите краће крајеве један за други (претходно заротиравши један од њих за 180°) и играчка је готова (слика 2 (b)). Уколико се крајеви једноставно залепе без ротирања добијамо (слика 2 (a)) обичну ваљкасту површ. Ако слободни крај ротирамо за $360^\circ, 540^\circ$ или општије за било који угао облика $180^\circ \cdot k$, добијамо двоструку, тростурку, односно k-тоструку Мебијусову траку.

Питање: Шта се догађа са Мебијусовом траком (општије са k-тоструком Мебијусовом траком), када се она извуче из нашег тродимензионалног и стави у четвородимензионални простор па се онда поново врати у наш тродимензионални простор!?

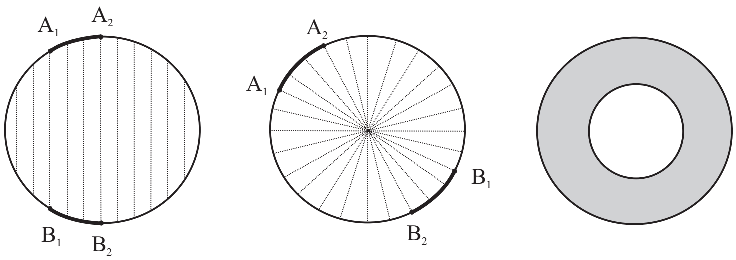
Парадоксалан и нимало очевидан одговор гласи да се са Мебијусовом траком не догоди баш ништа, док се двострука Мебијусова трака (добијена ротацијом краја за 360°) потпуно исправи и врати као обична ваљкаста површ. Другим речима у нашем тродимензионалном простору је превише тесно да би дошло до ове промене!

Закључак: Наоко мале и не тако важне разлике у лепљењу производе битне разлике код површи добијене тим лепљењем.

Погледајмо још један пример у коме се мале разлике у лепљењу манифестују драматичном разликом у особинама насталих објеката. И Мебијусова трака и обична ваљкаста површ су примери отворених површи. Покушајмо сада да одговарајућим лепљењем добијемо затворене површи.



Слика 1: Мебијусова трака (у средини) са рођакама.



Слика 2: Затворене површи добијене лепљењем.

На слици 2 лево приказан је круг од кога правимо затворену површ тако што га пресавијемо (по хоризонталном пречнику) и залепимо одговарајуће тачке на граничној кружници. Другим речима горњи полулук граничне кружнице лепимо на доњи лук (као да затварамо „рајсфершлус“), на пример лук A_1A_2 се лепи за лук B_1B_2. Није тешко визуелизовати шта се овде догађа. Добили смо затворену површ која би се (ако је довољно еластична) могла надувати као балон. Закључујемо да овој површи није тесно у тродимензионалном простору!

Шта се догађа ако лепљење извршимо на други начин и то тако (слика 2 у средини) што једну за другу лепимо дијаметрално супротне тачке граничне кружнице. И овде се лук A_1A_2 лепи на лук B_1B_2 али су лукови сада централно симетрични и није нимало лако видети шта ће се десити када се горњи полулук (централно симетрично) залепи на доњи полулук.

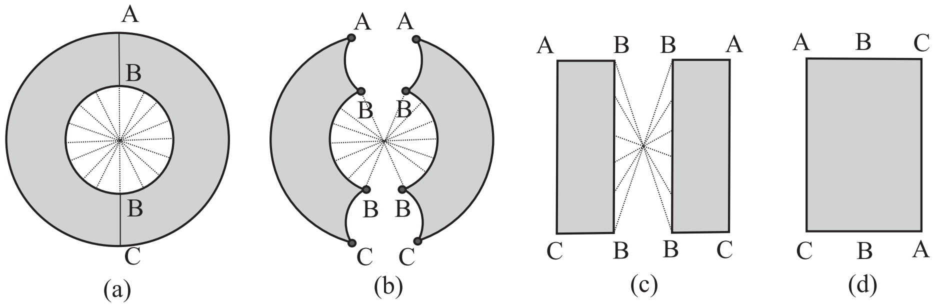
Ипак, уз мало маште закључујемо да ћемо опет добити затворену површ (јер је нестала гранична крива!). Међутим ову површ уопште није лако ни визуелизовати а камоли проверити да ли се она уопште може приказати у нашем тродимензионалном простору! Наслућујемо да је овој површи тесно у нашем тродимензионалном простору и да је то разлог потешкоћа у њеном описивању и разумевању!

2 Мали тополошки час анатомије

Необична површ описана у претходном одељку позната је под именом *пројективна раван*. Пажљивим „хируршким“ резом исецимо из пројективне равни један мањи круг (слика 2 десно). Оно што преостаје је (осенчени) кружни прстен (наравно са слепљеном спољном кружницом).

Задатак 1: Показати да осенчени кружни прстен на слици 2, тј. површ добијена одстрањивањем круга из пројективне равни, није ништа друго него Мебијусова трака!

Решење задатка 1 дато је на слици 3. У првом кораку (слика 1 (a)) „посувратићемо“ кружни прстен са слике 2 са идејом да спољна кружница постане унутрашња. Стриктно говорећи ово није било неопходно и једини разлог је лакша презентација остатка доказа.



Слика 3: Пиктограм решења задатка 1.

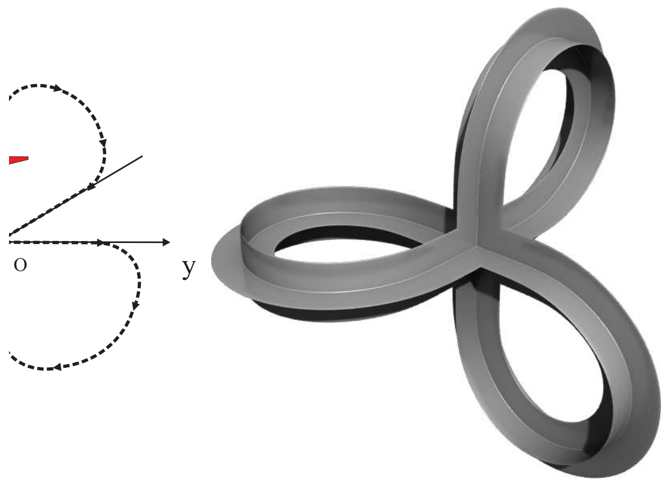
Следећи корак је врло интересантан и илуструје врло важну, лепу и генералну идеју. Узећемо маказе у шаке и додатно исећи површ коју анализирамо! Идеја је да добијемо делове којима је лакше манипулисати, али не смемо заборавити да на крају направљене резове поново спојимо!

Рез вршимо по две дужи AB и BC (користимо исто слово за тачке на унутрашњој кружници које ће бити слепљене једна за другу!). Добијене криволинијске четвороуглове исправимо у правоугаонике (слика 3 (c)). Десни правоугаоник ротирамо око хоризонталне осе симетрије (основице AB и BC при томе замене места) и залепимо десну ивицу левог на леву ивицу десног правоуганика. Добијамо правоугаоник на слици 3 (d). На крају се врши лепљење по направљеним резовима по дужима AB и BC и (са задовољством) увиђамо да је то тачно стандардно лепљење које описује Мебијусову траку.

Закључак: Изведена анализа показује да се пројективна раван добија ако се круг и Мебијусова трака залепе једно за друго дуж заједничке граничне кружнице. Приметимо да се сфера добија ако се дуж заједничке границе, један за други залепе два круга.

3 Бојова површ и задатак из прошлог броја Тангенте

Мебијусова трака се може направити, круг још лакше, али пројективну раван добијену слепљивањем ове две површи заиста не можемо приказати (без самопресецења) у нашем тродимензионалном простору! Због тога прибегавамо другим начинима да је приближимо нашим чулима и један од најпознатијих и најинтересатнијих је „Бојова површ“ приказана на насловној страни овог броја Тангенте. Немачки математичар Вернер Бој (Werner Boy), по коме је површ и добила име, био је ученик чувеног математичара Давида Хилберта. Задатак из прошлог броја Тангенте замишљен је као упутство за разумевање једне од конструкција Бојове површи.



Слика 4: Скелет Бојове површи.

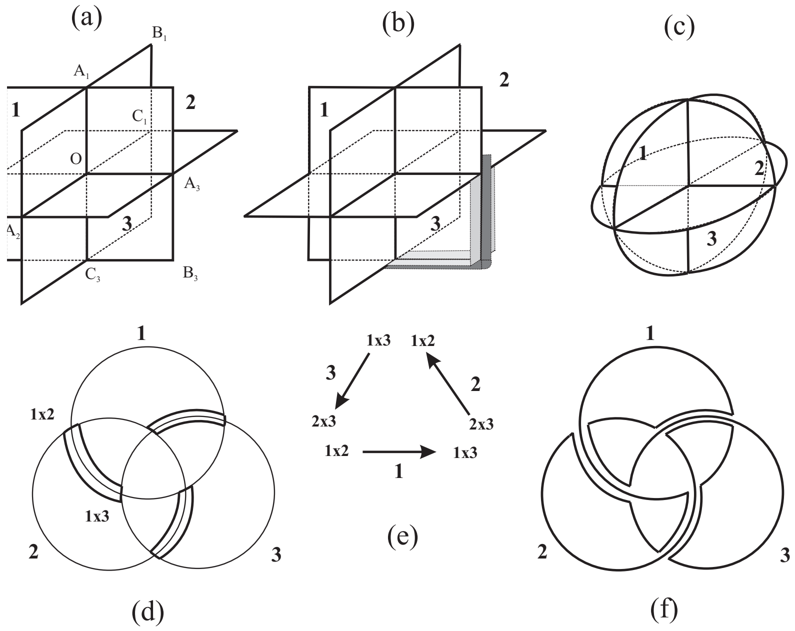
Подсетимо да се први део задатка односио на тврђење да ће крило авиона који се креће по тролисној „пропелер“ кривој приказаној на слици 4 (лево) описати Мебијусову траку. Ова површ сече саму себе (слика 4 десно) али је ипак веома складна и занимљива репрезентација Мебијусове траке у тродимензионалном простору.[1] Слика 4 (десно) има три рупе (по једну у свакој од координатних равни) које је лако затворити „кружним закрпама“.

Други (много тежи) део задатка односио се на тврђење да се и над преосталим делом контуре ове површи може разапети „купола“ која је коначно затвара до модела пројективне равни. Ово и јесте Бојова површ и неке од кључних фаза ове конструкције приказание су на насловној страни овог броја Тангенте. Још прегледније се генеза Бојове површи може пратити на анимацији коју можете наћи на адреси:

`http://www.rade-zivaljevic.appspot.com/index.html`

За најупорније читаоце скицираћемо доказ чињенице да је постављање куполе над границом површи приказане на слици 4 заиста могуће.

[1] Реч „веома складна“ се овде користи у неформалном значењу док ће зналац препознати да се овде ради о тзв. *имерзији* или локалном улагању површи.



Слика 5: Схема подизања куполе над скелетом Бојове површи.

У првом кораку заменићемо елегантни „скелет Бојове површи“ (површ са слике 4) не тако елегантним али математички тачним моделом који се може видети на слици 5. У тој слици је под (a) приказан централни исечак скелета са слике 4, а на слици 5 под (c) приказана је заобљена (сферична) верзија исте те слике. Граница последње површи је унија три кружнице које су издвојено приказане у делу (d) исте слике.

У следећем кораку фокусираћемо се на питање шта слици 5 (a) (односно слици 5 (c)) недостаје када се упореде са скелетом Бојове површи на слици 4. Како би одговорили на то питање послаћемо авиончић на још једно путовање, овог пута по изломљеној „пропелер кривој“ $OA_1B_1C_1OA_2B_2C_2OA_3B_3C_3$. Запажамо да крила авиона повремено изађу напоље ван слике 5 (a) (некада оба а некада само једно крило). Запажамо такође да се то догађа дуж лукова $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$. На пример на слици 5 (b) осенчена површ показује где су прошла оба (светла трака), односно само једно крило (тамна трака), приликом лета дуж лука $A_3B_3C_3$.

Сада смо у могућности да верно прикажемо границу нашег модела. Узећемо унију три кружнице и модификовати је (слика 5 (d)) на одговарајући начин сагласно промени до које долази преласком из слике (а) у слику (б).

На овај начин долазимо до описа границе новонастале површи (модела скелета Бојове површи) приказаног на слици 5 (f). Добили смо затворену криву, а над таквом кривом је увек могуће изградити куполу!