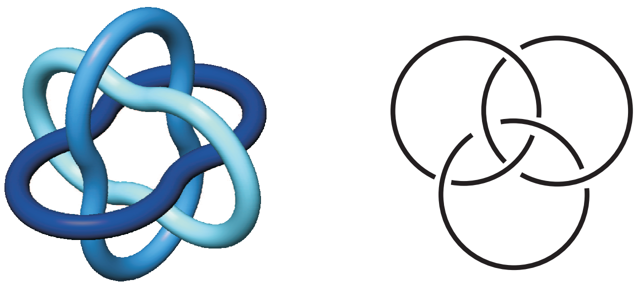
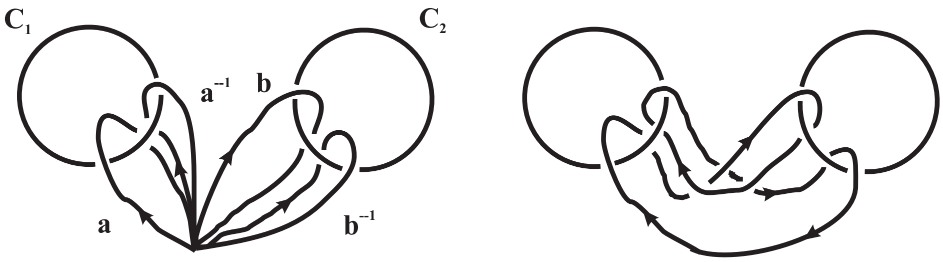
Боромејски прстенови или „Како уметнички окачити слику”

Раде Т. Живаљевић
Математички институт САНУ



Слика 1: Амблем (лого) Међународне математичке уније.

Боромејски прстенови (Borromean rings), видети Слике 1 и 2, симболизују јединство у коме је сваки део критично одговоран за опстанак целине. То је оно климаво јединство у коме пуцање само једног прстена и то било којег, води до распада целог система.



Слика 2: Комутатор $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ = „генетски код” Боромејских п.

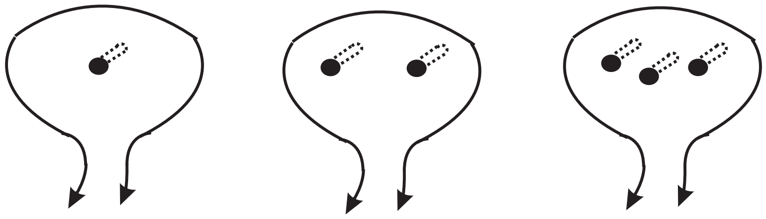
Ову појаву свакако треба изучавати и на њу упозоравати. Математички опис овог феномена базира се на особинама комутатора у (слободним) групама.

Свако ко се сусрео са Боромејским прстеновима вероватно се запитао да ли се нешто слично може направити са више од три прстена. Одговор је потврдан и таква конфигурација прстенова назива се *Брунова* (Brunnian rings).

Најтоплије препоручујемо читаоцу да консултује *Google* и претражи интернет уз помоћ наведених кључних речи а ми се окренимо једном практичнијем проблему у коме се ови објекти природно појављују.

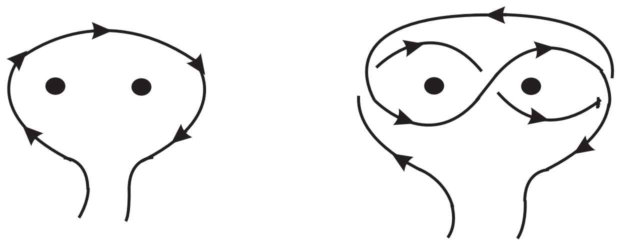
1 Парадоксално качење слика

Професор Сима Чворовић је био веома поносан на своју колекцију уметничких слика које су висиле по свим зидовима његовог стана. Наша прича почиње у тренутку када је комшија из суседног стана почео неке зидарске послове и када се од лупања и дрмања зидова једна од слика откачила и пала на под. Професор Сима се забринуо и одлучио да за сваки случај слике качи не на једну куку (ексерчић) већ на две куке или чак три или више кука код оних највреднијих слика које су му биле посебно драге.



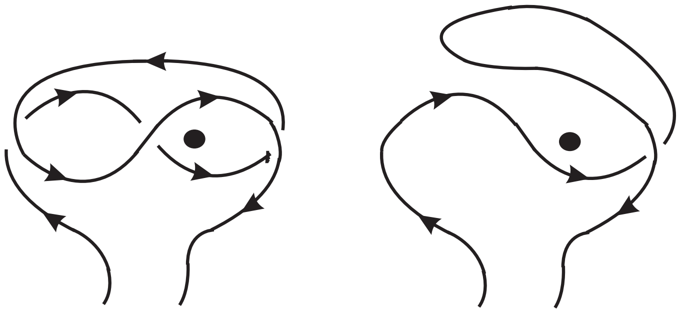
Слика 3:

Речено-учињено. Уместо да канап на коме је висила слика окачи само на једну куку, као на Слици 3 лево, професор Сима се определио за сигурније варијанте (Слика 3 у средини и десно). Сада је био сигуран да чак ако неки од ексерчића случајно испадне из зида, слика ће остати да виси на осталима!



Слика 4:

Намотавајући тако канап на два ексерчића, као на Слици 4 лево, професор се досетио да би још бољи ефекат постигао ако би канап намотао као на истој слици десно јер би канап још више био намотан око ексера. Био је веома



Слика 5:

задовољан својом досетљивошћу али је замало пао у несвест када је установио да се на тај начин окачена слика уопште не држи на десном ексерчићу! Заиста, као што показује једноставан експеримент (Слика 5), вађењем левог ексера слика ће се откачити и пасти на под!?

Добро је да бар леви ексер обавља своју функцију, помисли професор, али тада, на своје још веће запањење, установи да је и леви ексер исто тако непоуздан као и десни!? Заиста, то се може проверити експериментом али и тако што се Слика 5 погледа у огледалу.

„Па на чему онда виси та слика ако не виси ни на једном од два ексера”, завапи озлојеђени професор Сима Чворовић!

2 Парадоксалне речи

„Азбука од n симбола”је било какав скуп од n знакова при чему сваки знак има две верзије (велико и мало слово). На пример $\mathcal{A} = \{A, a, B, b, C, c\}$ је азбука од 3 симбола. Реч у азбуци је било какав низ знакова из те азбуке, нпр. $aCbaABcC$ је једна реч у азбуци $\mathcal{A}$. Казаћемо да је реч у некој азбуци *скратива* ако се у њој негде јављају једно поред другог велико и мало слово истог знака (у супротном је *нескратива*).

Скраћивање речи је сукцесивно брисање суседних малих и великих слова истог знака[1], нпр. једно скраћивање горње речи је

$$aCb(aA)BcC \longrightarrow aCbB(cC) \longrightarrow aC(bB) \longrightarrow aC$$

Реч је *потпуно скратива* ако се скраћивањем она потпуно обрише, нпр. $aABb$ је потпуно скратива реч.

Нескратива реч је *парадоксална* ако постаје *потпуно скратива* ако се из ње избришу све појаве (и велика и мала слова) једног те истог знака, нпр. таква је реч $AbaB$ за азбуку од 2 симбола.

Задатак: Показати да парадоксалне речи постоје у свакој азбуци од n симбола. Другим речима показати да за сваку колекцију од n (великих и малих) слова $\mathcal{A} = \{a_1, A_1, a_2, A_2, \dots, a_n, A_n\}$ постоји нескратива реч $w = x_1x_2 \dots x_k$ написана у овом алфабету ($x_i \in \mathcal{A}$) тако да ако се изабере било који $j = 1, \dots, n$ и обришу из речи w сва слова a_j и A_j, тако добијена реч постаје потпуно скратива.

3 Речи и слике

Покажимо како се парадоксалне речи природно повезују са парадоксалним качењем слика и служе као мнемотехничка правила подесна за меморисање саме процедуре качења.

(1) Сваком ексеру се додељује један знак у некој азбуци, нпр. Слици 3 десно додељује се азбука $\mathcal{A}_3 = \{a, A, b, B, c, C\}$ док се Слици 4 десно асоцира азбука $\mathcal{A}_2 = \{a, A, b, B\}$.

[1] Операција скраћивања речи постаје још природнија уколико се велика слова интерпретирају као инверзи малих, тј. уместо A, B, C пишемо a^{-1}, b^{-1}, c^{-1} итд.

(2) Полазимо од једног краја узице и крећемо се лагано ка другом крају. Сваки пут кад пређемо *изнад* неког ексера допишемо њему асоцирано слово и то тако што пишемо мало слово ако је прелазак *с лева на десно*, односно велико слово ако је прелазак *с десна на лево*.

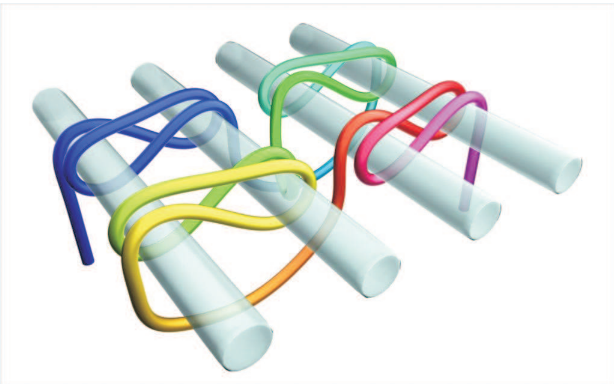
Погледајмо како то изгледа у примерима. Слици 3 десно додељује се реч abc јер смо крећући се полако дуж узице прво прошли (с лева на десно) изнад првог ексера (и написали слово a), затим изнад другог, затим трећег и добили коначно abc. Слици 4 десно одговара реч $aBAb$. Нагласимо још једном да се слова дописују само кад се пролази *изнад ексера* док се пролазак испод ексера не кодира. Приметимо да је реч $aBAb$ парадоксална.

Тврђење: Парадоксалним качењима слика одговарају парадоксалне речи. Обрнуто, увек долазимо до парадоксалног качења ако се слика окачи тако што се узме нека парадоксална реч и слика окачи тако што се задата реч искористи као упутство за качење.

На Слици 6 приказано је парадоксално качење уз помоћ 4 „ексера"(ваљкаста ослонца). Уверите се да је асоцирана парадоксална реч

$$(aBAb)(cDCd)(BabA)(DcdC). \qquad (1)$$

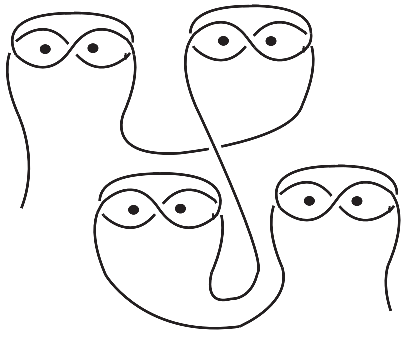
Заграде нису битне и стављене су само ради прегледности.



Слика 6:

4 Боромејски феномен очима оптимисте

На почетку чланка речено је да Боромејски и Брунови прстенови (парадоксалне речи, парадоксална качења слика, итд.) симболизују веома нестабилне системе који се потпуно анихилирају при најмањем „оштећењу". Погледајмо на овакве системе и са мало ведрије стране, у духу познатог Змајевог стиха „Радујмо се друже, што се и на трну, могу наћи руже!". Систем који да би опстао зависи круцијално од сваког свог сопственог дела афирмише идеју сарадње и кооперације, идеју поверења у друге и свест да постоје неке важне и лепе ствари које се не могу створити и очувати без учешћа и залагања сваког појединца!



Слика 7: „Четири совице".

Задаци за вежбу и размишљање:

1. Ако је w реч у некој азбуци онда је њен „инверз" w^{-1} реч која је потпуно скраћује (анихилира) ако се допише поред ње, тј. реч ww^{-1} је потпуно скратива. Уверити се да свака реч има свој инверз, нпр. ако је $w = abC$ онда је $w^{-1} = cBA$, ако је $w = a$ онда је $w^{-1} = A$, ако је $w = B$ онда је $w^{-1} = b$ итд.

2. Нека је $w = x_1x_2\dots x_n$ реч дужине n у некој азбуци $\mathcal{A} = \{a, A, b, B, c, C, \dots\}$. Доказати да се инверз w^{-1} од w може добити ако се реч w прочита унатрашке (погледа у огледалу) и свако слово x_i замени својим инверзом x_i^{-1},

$$w^{-1} = x_n^{-1}x_{n-1}^{-1}\dots x_1^{-1}.$$

3. *Комутатор* $[X, Y]$ речи $X = x_1\dots x_n$ и $Y = y_1\dots y_m$ се дефинише као реч

$$[X, Y] = XYX^{-1}Y^{-1} = x_1\dots x_ny_1\dots y_mx_n^{-1}\dots x_1^{-1}y_m^{-1}\dots y_1^{-1}.$$

Показати да ако су X и Y парадоксалне речи и ако су речи XY и YX^{-1} нескративе да је онда и комутатор $[X, Y]$ такође парадоксална реч.

4. Анализирајте качење слике уз помоћ 8 ексерчића приказано на слици „четири совице"(Слика 7). Асоцирајте варијабле x_1, x_2, x_3, x_4 (с лева на десно) ексерчићима из горњег реда, слично варијабле y_1, y_2, y_3, y_4 ексерчићима из доњег реда. Уверите се да је реч w асоцирана са овим качењем слике задата са

$$w = [x_1, x_2^{-1}][x_4^{-1}, x_3][y_2^{-1}, y_1][y_3, y_4^{-1}].$$

5. Уверите се да се реч асоцирана са сликом[2] на насловној страни овог броја Тангенте добија из претходне речи идентификацијама $x_1 = y_1$ и $x_3 = y_3$.

[2]Аутор насловне слике као и Слике 6 из чланка је Душан Живаљевић. Хвала Душане! Аутор Слике 1 (лево) је John Sullivan (TU, Berlin).