Орјентисани матроиди и Гејлова трансформација

-знакови поред пута-
Раде-едаР, јун 2007

Поднаслов "знакови поред пута" указује на карактер овог записа. Гледаћу да прибележим важне кораке у разоткривању појединих детаља, конструкција, кључних идеја итд. који омогућују "дубинско" разумевање теорије. Срећно!

1 Идеја водиља

1.1 Политопи $\Diamond_n$ и $\Box_n$ и прва појава знактора

Посматрајмо хипероктаедар $\Diamond_n := \mathrm{conv}\{\pm e_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^n$. Политоп дуалан хипероктаедру је коцка $\Box_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_j \leq +1\}$. Знак вектор или *знактор*[1] је сваки елемент скупа $\mathcal{Z}_n := \{-1, 0, +1\}^n$ (или скупа $\{-, 0, +\}^n$). Скуп $\mathcal{Z}_n$ наслеђује (покоординатно) парцијално уређење из парцијалног поретка на скупу $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1$ знакова задатог релацијама $+1 > 0 < -1$. Смисао овог поретка постаје јаснији ако се уочи да је овај поредак изоморфан посету $P(\Diamond_n)$ свих страна хипероктаедра $\Diamond_n$, односно антиизоморфан посету $P(\Box_n)$ свих страна хиперкоцке $\Box_n$. По навици симплексе природно поистовећујемо са одговарајућим барицентрима. Отуда се и знактори могу видети као барицентри што значи да се, без већег губитка јасноће, сваки знактор $\mathbf{z} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ може видети и као вектор $\mathbf{z}_F = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^n \epsilon_n e_n$ где је k број елементата скупа $I_{\mathbf{z}} := \{j \mid \epsilon_j \neq 0\}$ и $F := \mathrm{conv}\{\epsilon_j e_j\}_{j \in I_{\mathbf{z}}}$

1.2 Пресликавање $\mathcal{Z} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{Z}_n$

Сваком реалном броју $r \in \mathbb{R}$ додељујемо одговарајући знак $\mathcal{Z}(r) \in \{-1, 0, +1\}$. Ово пресликавање се покоординатно шири на пресликавање $\mathcal{Z} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{Z}_n$. Ако је $S \subset \mathbb{R}^n$ онда је по дефиницији $\mathtt{SGN}(S) := \{\mathcal{Z}(v) \mid v \in S\}$ скуп свих знактора асоцираним векторима из S. Приметимо да је $\mathtt{SGN}(S) = \mathtt{SGN}(\lambda S) = \mathtt{SGN}(\mathrm{cone}(S))$ где је $\lambda > 0$ и $\mathrm{cone}(S) := \cup_{\lambda > 0} \lambda S$ отворени конус над S. Специјално, ако је $U \subset \mathbb{R}^n$ векторски подпростор, онда је $\mathtt{SGN}(U) =: \mathcal{V}(U)$ скуп свих ***вектора*** асоцираног орјентисаног матроида $\mathcal{M}(U)$. Алтернативно $\mathcal{V}(U)$ се може идентификовати као скуп свих (отворених) страна $\mathring{F}$ полиедра $\Diamond_n$ такнвих да је $U \cap \mathring{F} \neq \emptyset$.

Застанимо за тренутак и још једном погледајмо последњу реченицу. Она каже да $\mathcal{V}(U)$ садржи информацију о томе како подпростор сече политоп $\Diamond_n$. Сви могући k-димензионални подпростори $U \subset \mathbb{R}^n$ чине Грасманову многострукост $G_k(\mathbb{R}^n)$. Једно од од најзначајнијих питања у целој области је везано за налажење комбинаторног

[1] Вектори, тензори али и торзори, спинори, твистори итд. (torsors, spinors, twistors) и други -ори су дефинитивно у моди па да и ми не заостанемо за светом!

модела за Грасманиан $G_k(\mathbb{R}^n)$. Постоји хипотеза да се до таквог модела може доћи "стратификацијом" Грасманиана у којој се два подпростора U_1 и U_2 налазе у истом стратуму уколико је $\mathcal{V}(U_1) = \mathcal{V}(U_2)$.

1.3 Шта је дакле орјентисани матроид!?

Формално речено, орјентисани матроид је било каква колекција знактора $\mathcal{M} \subset \mathcal{Z}_n$ која је веома слична колекцији $\mathcal{V}(U)$ за неки подпростор $U \subset \mathbb{R}^n$, видети [1] или [3] за формалну дефиницију. Оставимо то питање по страни и фокусирајмо се на питање шта се може рећи о подпростору U ако је познат скуп $\mathcal{V}(U)$. Један од основних резултата (Став 6.8. из [3]) каже да се из $\mathcal{V}(U)$ може реконструисати скуп $\mathcal{V}^*(U) := \mathcal{V}(U^\perp)$ где је $U^\perp$ ортогонални комплемент од U.

Глосаријум: Елементи скупа $\mathcal{V}(U)$ су ***вектори*** а елементи скупа $\mathcal{V}^*(U)$ су ***ковектори*** матроида $\mathcal{M}(U)$. Скуп $\mathcal{C}(U)$ минималних елемената скупа $\mathcal{V}(U)$ (у смислу поретка на $\mathcal{Z}_n$) је скуп ***циклова*** (circuits) матроида $\mathcal{M}(U)$ док се елементи скупа $\mathcal{C}^*(U) := \mathcal{C}(U^\perp)$ називају ***коциклови*** (cocircuits) матроида $\mathcal{M}(U)$.

1.4 Став 6.8. из [3]

Дефиниција 1: Знактори $\mathtt{c}$ и $\mathtt{d}$ су *ортогонални* $\mathtt{c} \perp \mathtt{d}$ ако постоје вектори $c, d \in \mathbb{R}^n$ такви да је $\mathtt{c} = \mathcal{Z}(c)$ и $\mathtt{d} = \mathcal{Z}(d)$ такви да је $\langle c, d\rangle = 0$, тј. вектори c и d који су ортогонални у смислу уобичајеног скаларног производа на $\mathbb{R}^n$. Ако је $S \subset \mathcal{Z}_n$ онда је по дефиницији $S^\perp$ скуп свих знактора $\mathtt{x} \in \mathcal{Z}_n$ таквих да је $\mathtt{x} \perp \mathtt{y}$ за све $\mathtt{y} \in S$.

Тврђење: (Став 6.8. из [3])

$$\mathcal{V}(U)^\perp = \mathcal{V}(U^\perp).$$

Доказ: Инклузија $\mathcal{V}(U^\perp) \subseteq \mathcal{V}(U)^\perp$ следи непосредно из дефиниција скупова $\mathcal{V}(U) = \mathtt{SGN}(U)$ и $\mathcal{V}(U^\perp) = \mathtt{SGN}(U^\perp)$ и чињенице да је $c \perp d$ за свака два елемента $c \in U$ и $d \in U^\perp$. Претпоставимо да $\mathtt{c} \notin \mathcal{V}(U^\perp)$. Нека је $F_{\mathtt{c}}$ одговарајућа страна хипероктаедра $\Diamond_n$. По дефиницији (видети одељак 1.1) $F_{\mathtt{c}} := \operatorname{conv}\{\epsilon_j e_j\}_{j\in I_{\mathtt{Z}}}$ где је $\mathtt{c} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ и $I_{\mathtt{c}} := \{j \mid \epsilon_j \neq 0\}$. Из услова $\mathtt{c} \notin \mathcal{V}(U^\perp)$ следи да је $U^\perp \cap \overset{\circ}{F}_{\mathtt{c}} = \emptyset$. Одавде, применом принципа сепарације конвексних скупова, следи да постоји вектор $d \in \mathbb{R}^n$ такав да је $\langle d, x\rangle = 0$ за све $x \in U^\perp$ (дакле $d \in U$) и $\langle d, y\rangle > 0$ за све $y \in \overset{\circ}{F}_{\mathtt{c}}$. Према томе $\mathcal{Z}(d) \in \mathcal{V}(U)$ је такав знактор за ког не важи $\mathcal{Z}(d) \perp \mathtt{c}$ одакле следи $\mathtt{c} \notin \mathcal{V}(U)^\perp$. Ово доказује супротну инклузију $\mathcal{V}(U)^\perp \subseteq \mathcal{V}(U^\perp)$.

2 Гејлова трансформација

Подпростор $U \subset \mathbb{R}^n$ чији матроид $\mathcal{M}(U)$ посматрамо често је облика $U = \operatorname{Ker}(A)$ где је $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ матрица ранга d. Сама матрица се може интерпретирати као колекција колона вектора $A = [a_1 a_2 \ldots a_n]$ у $\mathbb{R}^d$ а елементи $\lambda \in \operatorname{Ker}(A)$ као линеарне зависности $\sum_j \lambda_j a_j = 0$ међу њима.

Гејлова трансформација конфигурације вектора $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ у $\mathbb{R}^d$ је једна од колекција вектора $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ у простору $\mathbb{R}^{n-d}$ таква да за асоцирану матрицу $B = [b_1 b_2 \ldots b_n]$ важи да је $U^{\perp} = \mathrm{Ker}(B)$.

Постоје две тачке гледишта на то како се долази до матрице B. Матрица A је један од "диференцијала" у кратком тачном низу

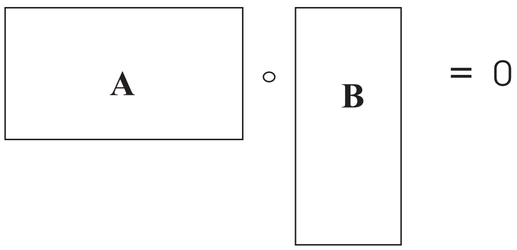
$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d} \xrightarrow{B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^d \longrightarrow 0$$

док је други диференцијал матрица B коју је потребно одредити. Моја омиљена тачка гледишта је да видим B као "универзалну" матрицу која задовољава једнакост $A \circ B = 0$, тј. као једну од матрица која има особину $A \circ B = 0$ али такву да за сваку матрицу C која има особину $A \circ C = 0$ постоји матрица D таква да је $C = B \circ D$. На пример ако се матрица A, множењем инвертибилном $(d \times d)$-матрицом са леве стране доведе на облик $A = [I_d \ A']$, онда је $B = [-A' \ I_d]^t$.

Остаје да се уверимо да је B матрица која има особину да је $\mathrm{Ker}(B) = U^{\perp}$. Преласком на дуале долазимо до кратког тачног низа

$$0 \longleftarrow (\mathbb{R}^{n-d})^* \xleftarrow{B^*} (\mathbb{R}^n)^* \xleftarrow{A^*} (\mathbb{R}^d)^* \longleftarrow 0$$

Тражени закључак следи из добро познате чињенице да је $\mathrm{Im}(A^*) \perp \mathrm{Ker}(A)$ и тачности дуалног низа $\mathrm{Ker}(B^*) = \mathrm{Im}(A^*)$.



Слика 1: Матрице A и B.

2.1 Категорија слободно множећих правоугаоника

Дефинишимо малу категорију $\mathcal{P}$ слободно множећих правоугаоника у којој су објекти природни бројеви а морфизми правоугаоници. Сасвим прецизно $Ob(\mathcal{P}) = \{[n] | n \in \mathbb{N}\}$ а за сваки пар $[m], [n] \in Ob(\mathcal{P})$ се уводи јединствени морфизам $\square_{m,n} : [m] \to [n]$ који се назива $(m \times n)$-правоугаоник. По дефиницији $\square_{d,n} \circ \square_{n,p} = \square_{d,p}$.

Категорија $\mathcal{P}$ је уведена да се подкрепи наша интуиција матричног множења базираног на множењу одговарајућих правоугаоника. Следећи корак би могао бити дефинисање категорије $\mathcal{PP}$ ("партиције правоугаоника") у којој су објекти парови $(n; (m_j)_{j=1}^d)$ где је $n \in \mathbb{N}$ а $(m_j)_{j=1}^d$ низ такав да је $m_1 + \ldots + m_d = n$ (уређена партиција природног броја n). Морфизми у $\mathcal{PP}$ су правоугаоници разбијени на блокове.

Смисао категорије $\mathcal{PP}$ био би да поткрепи нашу интуицију множења матрица разбијених на блокове.

2.2 Матрица или линеарни оператор!?

Могућност гипког прелажења из једног језика у други је врло корисна особина савремене линеарне алгебре. Инваријатни (функторијални) језик је једна од кључних карактеристика савремене математике и у линеарној алгебри овим језиком се обраћамо кад говоримо о линеарним операторима, тачним низовима итд. Конкретни матрични језик с друге стране је невероватно користан у комбинаторним и геометријским манипулацијама (Гејлова трансформација је одличан пример з аилустрацију).

Одговор на питање из наслова: И матрица и линеарни оператор!

3 Чему служи Гејлова трансформација!?

Библиографија

[1] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, G. Ziegler. *Oriented matroids.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications Vol. 46, Cambridge Univ. Press 1993.

[2] G. Ewald. *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics 168, Springer 1996.

[3] G.M. Ziegler. *Lectures on Polytopes.* Graduate Texts in Mathematics, Springer 1995.