Мини-курс "Морсова теорија"
CGTA-семинар 2007

Друга лекција

Налажење критичник тачака и одговарајућих индекса су "со и хлеб" Морсове теорије. Шта је са "печењем", "кифлицама са џемом" и другим деловима "Морсовског кувара"?! Ни једна гозба (симпозијум) се не памти само по хлебу, па је и наш следећи корак анализа шта се може добити из информације о критичним тачкама и њиховим индексима.

Пођимо од n-димензионалне сфере

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\},$$

простора који нам је јако добро познат и који може да послужи као тест пример за проблем откривања топологије многостуркости на основу информације добијене из неке њене Морсове функције. Функција

$$f : S^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x_0$$

има само две критичне вредности $-e_0$ и e_0 (минимум и максимум) при чему је $ind(-e_0) = 0$ и $ind(e_0) = n$. Није тешко показати а још лакше поверовати да је сфера једина многострукост која има само две критичне тачке. Много интересатније понашање има следећа функција

$$\phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$$

где је $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. Пошто је $grad(\phi) = (2\lambda_0 x_0, 2\lambda_1 x_1, \ldots, 2\lambda_n x_n)$, из услова критичности $grad(\phi)_x \perp T_x S^n$ или што је еквивалетно (Лагранжови мултипликатори) анализном критичник тачака функције

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 - \lambda(x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2),$$

налазимо да је скуп критичних тачака функције ϕ на сфери S^n

$$Crit(\phi) = \{\pm e_0, \pm e_1, \ldots, \pm e_n\}.$$

Запамтимо да је $\lambda = \lambda_j$ мултипликатор који одговара критичним тачкама $-e_j$ и e_j. Одредимо индексе ових критичних тачака. Уочимо да $\mathbb{Z}_2$-дејство на S^n дефинисано инволуцијом $\omega(x) = -x$ чува функцију ϕ, тј. $\phi(-x) = \phi(x)$. Одавде закључујемо да је $ind(-e_j) = ind(e_j)$ па је довољно наћи један од ова два индекса.

Узмимо $x_0, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n$ као локалне координате на сфери S^n у околини тачке e_j ($\hat{x}_j$ као и обично значи да је та координата испуштена). Из услова $x_j^2 = 1 - (x_0^2 + \ldots + x_j^2 + \ldots + x_n^2)$, добијамо локални запис функције ϕ у тим координатама

$$\phi(x) = \lambda_j + \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_j) x_k^2.$$

Одавде се непосредно очитава да је $ind(e_j) = j$. Како искористити ову информацију!?

Морсово скенирање многостурксти

Основна употреба Морсове функције $f : M \to \mathbb{R}$ је да се уз њену помоћ *скенира* многостуркост M. Замишљајући да се параметар ("висина") c све више повећава, скенирамо M тако што посматрамо шта се при томе дешава са c-поднивоом $M_{\leq c} = \{x \in M \mid f(x) \leq c\}$. Приметимо да је подниво $M_{\leq c}$ многострукост са границом и да је $\partial(M_{\leq c}) = M_c$ где је $M_c = \{x \in M \mid f(x) = c\}$ одговарајући нивоски скуп.

Ако је $c < \min(f)$ онда је наравно $M_{\leq c} = \emptyset$. Слично, ако је $c \geq \max(f)$ онда је $M_{\leq c} = M$. Може се закључити да се лаганим растом параметра c пред нама помаља цела многостуркост M као и да се она у неком смислу може реконструисати ако установимо шта се догађа са поднивоским скупом при малим променама параметра c.

Први принцип Морсове реконструкције: Уколико у затвореном интервалу $[c_0, c_1]$ нема критичних вредности Морсове функције $f : M \to \mathbb{R}$, онда су сви поднивои $M_{\leq t}$, $c_0 \leq t \leq c - 1$ међусобно тополошки једнаки (хомеоморфни, дифеоморфни чак). Другим речима поднивоски скуп $M_{\leq t}$ лагано расте али не мења свој тополошки тип.

Други принцип Морсове реконструкције: Претпоставимо да c_0 и c_1 нису критичне вредности као и да у интервалу (c_0, c_1) постоји тачно једна критична вредност c функције f. У том случају је

$$M_{\leq c_1} \cong M_{\leq c_0} \cup_h N.$$

Другим речима поднивоска многострукост $M_{\leq c_1}$ се и из поднивоске многострукости $M_{\leq c_0}$ добија тако што се на њу "налепи" (уз помоћ функције h) нова многострукост N чији карактер зависи само од критичних тачака које одговарају критичној вредности c.

Добра вест: Све што се може десити (врста многостурксти N и начин лепљења) дешава се већ у случају Морсове функције ϕ дефинисане на сфери S^n. Другим речима довољно је схватити шта се дешава са поднивоским скуповима ове функције па да се има комплетна слика о генералном случају!

"Mathematica" анимација: Искористити стереографску пројекцију

$$Sp : S^3 \setminus \{e_3\} \to \mathbb{R}^3 \quad (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_0, y_1, y_2) = \frac{1}{1 - x_3}(x_0, x_1, x_2)$$

за визуелизацију (параметризацију) 3-сфере. Функција ϕ у y-координатама добија следећи облик:

$$\phi(y) = (1 - x_3)^2[\lambda_0 y_0^2 + \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2] + \lambda_3 x_3^2$$

при чему је

$$x_3 = \frac{\|y\|^2 + 1}{\|y\|^2 - 1}.$$

- Одредити критичне тачке функције ϕ у y-координатама.

- Избором конкретних параметара $\lambda_0 < \ldots < \lambda_3$ посматрати шта се дешава са поднивоским скуповима $\phi^{-1}((-\infty, t])$ када параметар t расте од $\min(\phi) = \lambda_0$ до $\max(\phi) = \lambda_3$.

Теорија предвиђа да би сценарио промене поднивоског скупа требао да изгледа отприлике овако:

- За $t < \lambda_0$ на екрану (тј. у простору $\mathbb{R}^3$) не види се ништа.
- У тренутку $t = \lambda_0$ појављују се две тачке (минимуми функције ϕ).
- Ове две тачке постају све веће лопте са растом параметра t у интервалу $\lambda_0 < t < \lambda_1$.
- Како се параметар t приближава критичној вредности λ_1, лопте испуштају једна према другој два пара "руку" (псеудопода) које се и додирну за $t = \lambda_1$.
- У интервалу $\lambda_1 < t < \lambda_2$ парови "руку" су се спојили и пред нама је пун торус ("Морсов ђеврек").
- Нешто драматично се догађа када параметар t почне да се приближава критичној вредности λ_2. Ђеврек, са једне и са друге стране почиње да гради куполе које имају тенденцију да се затворе.
- Проласком кроз критичну вредност $t = \lambda_2$, куполе су се затвориле и ђеврек се затворио у сферу (са задебљаним зидовима).
- Док параметар тежи највећој критичној вредности, $t \to \lambda_3$, зидови сфере се све више задебљавају (попуњавајући и унутрашњу и спољашњу рупу) и пред нама се поднивоски скуп комплетира до полазне многострукости $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$.

Опажања: Антиподално дејство $x \mapsto -x$ у сфери S^3 се на "екрану" $\mathbb{R}^3$ види као инверзија у односу на централну 2-сферу $S = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \|y\| = 1\}$. Ово нам допушта да пројективни простор $S^3/\{x = -x\}$ визуелизујемо као лопту $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|y\| \leq 1\}\}$ у којој се идентификују тачке y и $-y$ на сфери S. Овај модел физичари зову π-лопта (видети нпр. Ф. Хербут, Кватна механика, стр. 169). Пошто је Морсова функција $\phi : S^3 \to \mathbb{R}$ инваријатна у односу на антиподално дејство она индукује Морсову функцију $\phi' : RP^3 \to \mathbb{R}$. Поднивоски скупови $RP^3_{\leq t} = \phi'^{-1}(-\infty, t]$ се врло лепо прате у одговарајућој π-сфери. Заиста $RP^3_{\leq t} = S^3_{\leq t}/\mathbb{Z}_2$. Отуд закључујемо да нпр. две лопте у горњем сценарију постају једна лопта (у π-сфери), "ђеврек" остаје ђеврек али "подељен са 2" итд. Закључак је да нам горњи сценарио, интерпретиран у π-сфери, допушта да пратимо геометрију пројективног простора RP^3 и нпр. одередимо хомолшке групе ове многострукости!