Мини-курс "Морсова теорија"
CGTA-семинар 2007

Прва лекција

Морсова теорија: (потсетник)
Морсова теорија (или Теорија Морса) састоји се од низа елегантних и у основи једноставних техника за анализу глатких многострукости M на основу понашања добро изабраних глатких функција (Морсових функција) $f : M \to \mathbb{R}$.

Елемент $a \in M$ је *критична тачка* глатке функције f ако је $df_a = 0$ или еквивалентно, у присуству метрике на M, ако је $\mathrm{grad}(f)_a = 0$. У околини своје критичне тачке a функција f се по Тејлоровој формули, у некој својој координатној карти, записује као

$$f(a+v) - f(a) = B(v,v) + o(\|v\|)$$

где је $B(\cdot,\cdot)$ симетрична билинеарна форма. Свака таква форма се дијагонализује, односно у одговарајућим кооринатама важи

$$B(x,x) = -x_1^2 - \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2. \tag{1}$$

Број p тј. број негативних чланова у репрезентацији (1) назива се *индекс* форме $B(\cdot,\cdot)$, односно *индекс критичне тачке* a. Уколико је $n = p + q = \dim(M)$, кажемо да је a недегенерисана критична тачка, а функција којој су све критичне тачке недегенерисане назива се *Морсова функција*.

Основни постулат Морсове теорије: Све (или готово све (или бар нешто)) се о топологији неке многострукости може сазнати уколико за неку функцију Морса f знамо све њене критичне тачке $a \in Crit(f)$ као и одговарајуће индексе $ind(a)$.

Налажења критичних тачака и њихових индекса

Покажимо на примеру унитарне групе $M = U(n)$ како се елегантно могу одредити критичне тачке и њихови индекси. По дефиницији

$$U(n) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A \cdot A^* = I\}$$

где је $W = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ векторски простор свих $n \times n$–матрица са комплексним коефицијентима и $A^* := \bar{A}^t$. Реална димензија векторског простора W је $2n^2$ па се $U(n)$ природно "визуелизује" као n^2-димензионална многострукост у амбиентном $2n^2$-димензионалном простору $\mathbb{R}^{2n^2}$.

У случајевима када је $M \subset \mathbb{R}^N$ подмогострукост неког векторског простора, природан избор за функцију Морса $f : M \to \mathbb{R}$ је рестрикција неке линеране функције $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. На пример ако је $\langle\cdot,\cdot\rangle$ одговарајући скаларни производ на $\mathbb{R}^N$, можемо посматрати функцију

$$f_b : M \to \mathbb{R}, \qquad f_b(x) := \langle x, b\rangle.$$

Приметимо да је тачка $a \in M$ критична тачка функције f_b акко је тангентни простор T_aM од M у тачки a ортогоналан на b. Диференцијал линеарне форме $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle \cdot, x\rangle$ природно се идентификује са самом формом $dh = h$ а градиент $\mathrm{grad}(h) = b$ је одговарајући дуални вектор. Одавде се добија да је градијент функције f_b у тачки $x \in M$

$$\mathrm{grad}(f_b) = \mathrm{Proj}_x(b) \tag{2}$$

једнак пројекцији вектора b на тангетни простор T_xM од M у тачки x.

У случају унитарне групе $M = U(n)$, свака (комплексна) линеарна форма има облик $Tr_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $Tr_A(X) := Tr(AX)$ за неку матрицу A, а свака реална форма је реални део $Tr_A^r := Re(Tr_A)$ овакве форме.

Хермитски скаларни производ у векторском простору матрица $W = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ задан је са

$$\langle X, Y\rangle = Tr(X^* \cdot Y). \tag{3}$$

Унитарна група $U(n)$ дејствује на W обичним множењем матрица. Приметимо да је скаларни производ (3) инваријантан у односу на ово дејство

$$\langle gX, gY\rangle = Tr((gX)^* \cdot gY) = Tr(X^*g^*gY) = Tr(X^*Y) = \langle X, Y\rangle. \tag{4}$$

Одавде следи да је асоцирани реални скаларни производ

$$\langle X, Y\rangle_r := Re\langle X, Y\rangle \tag{5}$$

на W такође инвариантан у односу на дејство групе $U(n)$. Одредимо ортогонални пројектор $P_g : W \to T_gU(n)$ на тангетни простор у тачки $g \in U(n)$. С обзиром на инвариантност скаларног производа (5), важи $P_g = gP_eg^{-1}$ па је довољно наћи пројектор $P_e : W \to T_eU(n)$ где је $e \in U(n)$ једични елемент и $T_eU(n) = u(n)$ одговарајућа Лиова алгебра.

Лема 1: $P_e(X) = \frac{1}{2}(X - X^*)$.

Као последицу добијамо да је

$$P_g(X) = \frac{1}{2}g(g^*X - X^*g) = \frac{1}{2}[X - gX^*g]. \tag{6}$$

Претпоставимо да је $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ фиксна матрица и потражимо Морсову функцију $f_A : U(n) \to \mathbb{R}$ као рестрикцију линеарне форме $ReTr(A^*X) = Re\langle A, X\rangle = \langle A, X\rangle_r$. Као последицу од (6) добијамо

Лема 2: Ако је $f_A : U(n) \to \mathbb{R}$ функција задана као рестрикција линеарне форме $\langle A, \cdot\rangle$ онда је

$$\mathrm{grad}(f_A)_g = P_g(A) = \frac{1}{2}[A - gA^*g].$$

Одавде следи да је $g \in U(n)$ критична тачка функције f_A акко важи

$$A = gA^*g. \tag{7}$$

Различитим изборима матрице A добијају се различите функције са у општем случају различитим скуповима критичних тачака $Crit(f_A)$. Погледајмо нпр. шта се дешава ако је

$$A = \mathrm{diag}[a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

дијагонална матрица са позитивним, строго растућим дијагоналним елементима

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

Теорема 1: Под наведеним условима важи:

(1) f_A је Морсова функција на $U(n)$;

(2) Скуп критичних тачака функције се састоји од свих дијагоналних матрица са ± 1 елементима на дијагонали

$$Crit(f_A) = \{\mathrm{diag}[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n] \mid \epsilon_i = \pm 1\};$$

(3) Индекс критичне тачке $c = \mathrm{diag}[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n]$ је

$$ind(c) = \sum_{\epsilon_k = 1} 2k - 1.$$

Доказ: Сагласно услову (7), $c \in U(n)$ је критична тачка акко важи $cAc = A$. Конјуговањем се добија релација $A = c^* A c^*$ а из њих се добија $A^2 = cA^2c^{-1}$ као потребан услов да c буде критична тачка. Из чињенице да матрице A^2 и c комутирају закључујемо да је c такође дијагонална матрица након чега се лако проверава да се $Crit(f_A)$ састоји од матрица траженог облика.

Нека је $c = \mathrm{diag}[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n]$. Израчунајмо други извод (Хесијан) функције f_A у тачки c. Координатизујмо околину од $c \in U(n)$ уз помоћ експоненцијалног пресликавања $B \mapsto c \cdot \exp(B)$ где је $B \in T_eU(n)$ елемент тангентног простора у јединици $e \in U(n)$. Наддиагоналне и диагоналне елементе матрице $B = (b_{ij})$ можемо узети као локалне координате. Тада важи

$$f_A(x) - f_X(c) = ReTrA(x - c) = ReTrAc(\exp(B) - I) =$$

$$= ReTrAc(B + \frac{1}{2}B^2) + o(\|B\|^2) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i \epsilon_i b_{ij} b_{ji} + o(\|B\|^2)$$

одакле се добија

$$f_A(x) - f_X(c) = -\sum_{n \geq j \geq i \geq 1} (a_i \epsilon_i + a_j \epsilon_j) |b_{ij}|^2 + o(\|B\|^2).$$

Пошто је $a_j > a_i$ за $j > i$ закључујемо да је $\mathrm{sgn}(a_i \epsilon_i + a_j \epsilon_j) = \mathrm{sgn}(a_j \epsilon_j)$. Одавде закључујемо да члан $|b_{ij}|^2$ улази у Хесијан са знаком "$-$" ако је $\epsilon_j = 1$ и са знаком "$+$" ако је $\epsilon_j = -1$ одакле непосредно следе тврђења (1) и (3) у теореми. $\square$