log-конкавне функције и лема Громова

Боривоје Дакић[1], Раде Живаљевић[2]

Михаил Громов у свом раду "Isoperimetry of waists and concentration of maps", GAFA, Vol. 13 (2003), 178 - 215, на страни 186 формулише следећу лему:

Elementary Lemma. Let $\phi_0(t), t \in [0, t_0 \leq +\infty)$ be a smooth, positive, monotone decreasing function where $(\log \phi_0)'' \leq 0$ and moreover $(\log \phi_0)''$ is monotone decreasing. Let $\lambda(\tau), \tau \leq \tau_0 \leq t_0$ be a positive function and define, for $t \in [0, t_0 - \tau_0]$, $\psi(t) = \inf_{0 \leq \tau \leq \tau_0} \lambda(\tau)\phi_0(t + \tau)$. Then

$$\frac{\int_0^\epsilon \psi(t)dt}{\int_0^{t_0-\tau_0} \psi(t)dt} \geq \frac{\int_0^\epsilon \phi_0(t)dt}{\int_0^{t_0} \phi_0(t)dt}. \tag{1}$$

Громов доказ ове леме квалификује као директан ("straightforward") и оставља га читаоцу. Овде дајемо један доказ ове леме који поред осталог показује да се неки услови на функцију ϕ_0 могу битно ослабити.

0.1 log-конкавне функције и мере

Дефиниција 1: Функција $f : X \to \mathbb{R}$ дефинисана на конвексном скупу $X \subset \mathbb{R}^n$ је log-конкавна уколико је ненегативна и за све елементе $x, y \in X$ и $\alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \geq 0$, задовољава релацију

$$f(\alpha x + \beta y) \geq f(x)^\alpha \cdot f(y)^\beta. \tag{2}$$

Другим речима функција f је log-конкавна уколико је $\log(f)$ конкавна функција. За меру $d\mu = f\,dm$ кажемо да је log-конкавна уколико је њена функција густине f log-конкавна.

Теорија log-конкавних функција је интересатнија и садржајнија него што би се могло помислити на први поглед. Неке од најважнијих функција, међу њима је и функција $y = e^{-x^2}$ су log-конкавне. Услов log-конкавности $(\log \phi_0)'' \leq 0$ који се појављује у формулацији леме Громова је и најважније својство те функције.

0.2 Лево доминатне мере

Нека су μ и ν две вероватносне (Борелове) мере дефинисане на интервалу $[0, t_0)$ (случај $t_0 = +\infty$ је допуштен). Кажемо да је μ *лево доминантна* у односу на ν и пишемо $\mu \succcurlyeq_L \nu$ ако за сваки $0 \leq \epsilon \leq t_0$ важи неједнакост

$$\mu([0, \epsilon]) \geq \nu([0, \epsilon]).$$

[1]Физички факултет Београд

[2]Математички институт САНУ

У овом приказу ограничићемо се на безатомне мере и то по правилу мере облика $f\,dt$ где је dt Лебегова мера а f непрекидна (или глатка) функција. Следеће тврђење наводимо ради комплетности. Оно се лако доказује апроксимацијом (у $L_1(\mu)$-норми) монотоно опадајуће функције f позитивним комбинацијама функција облика $\chi_{[0,\epsilon)}$ где је χ_A карактеристична функција скупа A.

Тврђење 1: Мера μ је лево доминатна у односу на меру ν ако и само ако

$$E_\mu(f) = \int_0^{t_0} f\,d\mu \geq \int_0^{t_0} f\,d\nu = E_\nu(f)$$

за сваку ненегативну, монотоно опадајућу (нерастућу) функцију $f : [0, t_0) \to \mathbb{R}$.

Дефиниција леве доминатности се природно може проширити и на позитивне мере које нису обавезно вероватносне. За такве мере кажемо да је $\mu \succcurlyeq_L \nu$, тј. да је μ лево доминатна у односу на ν уколико то важи за одговарајуће асоциране вероватносне мере

$$\mu_1 = \frac{1}{\mu([0,t_0))}\mu \quad \text{и} \quad \nu_1 = \frac{1}{\nu([0,t_0))}\nu.$$

На пример ако су $f, g : [0, t_0) \to \mathbb{R}$ две позитивне и непрекидне функције а μ вероватносна мера на $[0, t_0)$, онда $f\,d\mu$ лево доминантна у односу на меру $g\,d\mu$ ако за сваки $0 \leq \epsilon < t_0$ важи неједнакост

$$\frac{\int_0^\epsilon f(t)d\mu(t)}{\int_0^{t_0} f(t)d\mu(t)} \geq \frac{\int_0^\epsilon g(t)d\mu(t)}{\int_0^{t_0} g(t)d\mu(t)}. \tag{3}$$

По договору, функција f је лево доминатна у односу на функцију g, у ознаци $f \succcurlyeq_L g$, уколико је $f\,dt \succcurlyeq_L g\,dt$, где је dt Лебегова мера на $[0, t_0)$. Према томе "Лема Громова" ће бити доказана (чак у нешто појачаној форми) ако покажемо да је $\psi \succcurlyeq_L \phi_0$.

0.3 Критеријум леве доминатности функција

Тврђење 2: Ако су $f, g : [0, t_0) \to \mathbb{R}$ две позитивне, непрекидне функције, онда је $f \succcurlyeq_L g$ ако је $h := f/g$ растућа (тј. неопадајућа) функција на $[0, t_0)$. Још генералније, ако је μ вероватносна мера на $[0, t_0)$ и $h : [0, t_0) \to \mathbb{R}$ растућа (неопадајућа) функција, онда је

$$\mu \succcurlyeq_L \frac{1}{E_\mu(h)}\, h \cdot \mu.$$

Доказ: За средњу вредност функције h на интервалу $[0, t_0)$ важи

$$E_\mu(h) = \int_0^{t_0} h\,d\mu = \mu([0,\epsilon])(\frac{1}{\mu([0,\epsilon])}\int_0^\epsilon h\,d\mu) + \mu([\epsilon,t_0))(\frac{1}{\mu([\epsilon,t_0))}\int_\epsilon^{t_0} h\,d\mu) \tag{4}$$

тј. $E_\mu(h)$ је једнака конвексној комбинацији средњих вредности исте функције на интервалима $[0,\epsilon]$ и $[\epsilon, t_0)$. Пошто је h растућа функција закључујемо да важи

$$\frac{1}{\mu([0,\epsilon])}\int_0^\epsilon h\,d\mu \leq \frac{1}{\mu([\epsilon,t_0))}\int_\epsilon^{t_0} h\,d\mu$$

па из (4) добијамо неједнакост

$$E_\mu(h) \geq \frac{1}{\mu([0,\epsilon])}\int_0^\epsilon h\,d\mu \Rightarrow \mu([0,\epsilon]) \geq \frac{1}{E_\mu(h)}\int_0^\epsilon h\,d\mu$$

што је тражена неједнакост. □

0.4 Доказ леме Громова

Лему Громова ћемо доказати у појачаној форми. Неки услови нису потребни, нпр. услов о монотоности функције $(\log\phi_0)''$ што наговештава да је сам Громов вероватно базирао свој доказ на другим аргументима.

Тврђење 3: Нека је $\phi_0(t), t \in [0, t_0 \leq +\infty)$ глатка, позитивна и log-конкавна функција $(\log\phi_0)'' \leq 0$. Нека је $\lambda(\tau), \tau \leq \tau_0 \leq t_0$ позитивна (непрекидна) функција. Дефинишимо, за $t \in [0, t_0 - \tau_0)$, функцију $\psi(t) = \inf_{0\leq\tau\leq\tau_0}\lambda(\tau)\phi_0(t+\tau)$. Тада важи неједнакост

$$\frac{\int_0^\epsilon \psi(t)dt}{\int_0^{t_0-\tau_0}\psi(t)dt} \geq \frac{\int_0^\epsilon \phi_0(t)dt}{\int_0^{t_0}\phi_0(t)dt}. \tag{5}$$

Доказ: Проширимо функцију ψ на цео интервал $[0, t_0)$,

$$\psi(t) = \inf\{\lambda(\tau)\phi_0(t+\tau) \mid 0 \leq \tau \leq \tau_0 \text{ и } t+\tau < t_0\}.$$

Докажимо да је за доказ леме Громова довољно доказати да овако дефинисана функција ψ има особину да је функција ψ/ϕ_0 опадајућа на интервалу $[0, t_0)$. Заиста, ослањањем на Тврђење 2, из чињенице да је ϕ_0/ψ растућа функција следела би неједнакост

$$\frac{\int_0^\epsilon \psi(t)dt}{\int_0^{t_0}\psi(t)dt} \geq \frac{\int_0^\epsilon \phi_0(t)dt}{\int_0^{t_0}\phi_0(t)dt} \tag{6}$$

која очевидно повлачи неједнакост (5).

Лема: Под условима Тврђења 3, функција ψ/ϕ_0 је опадајућа на интервалу $[0, t_0)$.

Доказ леме: Из услова $(\log\phi_0)'' \leq 0$ закључујемо (теорема о средњој вредности) да важи

$$\Delta_\tau\Delta_\theta(\log\phi_0)(t) \leq 0 \tag{7}$$

где су θ и τ позитивни бројеви такви да је $t+\theta+\tau < t_0$ и

$$\Delta_\theta(g)(t) = g(t+\theta) - g(t), \quad \Delta_\tau\Delta_\theta(g)(t) = g(t+\theta+\tau) - g(t+\theta) - g(t+\tau) + g(t).$$

Из (7) добијамо

$$\frac{\phi_0(t+\theta+\tau)}{\phi_0(t+\theta)} \leq \frac{\phi_0(t+\tau)}{\phi_0(t)} \Rightarrow \frac{\lambda(\tau)\phi_0(t+\theta+\tau)}{\phi_0(t+\theta)} \leq \frac{\lambda(\tau)\phi_0(t+\tau)}{\phi_0(t)}.$$

Ако на обе стране последње неједнакости потражимо инфимум по допустивим вредностима од τ добијамо неједнакост

$$\frac{\psi(t+\theta)}{\phi_0(t+\theta)} \leq \frac{\psi(t)}{\phi_0(t)}$$

што је и жељена неједнакост.