ЗАДАЦИ

Мини-курс "Карактеристичне класе" CGTA-семинар 2006

Карактеристичне класе: (потсетник)
Свако n-димензионално (реално) векторско раслојење $E \xrightarrow{\pi} B$, може се визуелизовати као фамилија $\{E_b\}_{p\in B}$ векторских простора параметризована тачкама из B. Ако се тачка $b \in B$ помера, нпр. дуж неке криве у B, слој раслојења $E_b = \pi^{-1}(b)$ се такође помера и увија. Један од начина да се "измери" увијање векторског раслојења је преко одговарајућих кохомолошких карактеристичних класа $w_i = w_i(E) \in H^i(B, \mathbb{Z}_2)$ познатих као Stiefel-Whitney-јеве класе.

Асоцирајмо сваком векторском раслојењу $\xi = \{E \xrightarrow{\pi} B\}$ одговарајући Stiefel-Whitney полином

$$P_t(\xi) = P_t^{SF}(\xi) = t^n + w_1(\xi)t^{n-1} + \ldots + w_{n-1}(\xi)t + w_n(\xi).$$

Полином $P_t(\xi)$ можемо видети формално као згодан начин да се води евиденција о Stiefel-Whitney-класама раслојења, нпр. $P_1^{SW}(\xi)$ је тотална S-W-класа раслојења ξ.

Следећи резултат има фунадаментално значење и вероватно је најважније средство за израчунавање S-W-класа.

Теорема 1: (Whitney-јева теорема)

$$P_t(\xi \oplus \eta) = P_t(\xi) \cdot P_t(\eta). \tag{1}$$

Последица 1: Ако се раслојење разлаже на суму линијских (тј. једнодимензионалних) раслојења,

$$\xi \cong L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n$$

онда се полином $P_t(\xi)$ факторише на линеарне чиниоце, тј. важи

$$P_t(\xi) = (t + x_1)(t + x_2) \ldots (t + x_n) \tag{2}$$

где је $x_i = w_1(L_i)$ прва S-W-класа раслојења L_i.

Напомена 1: Полином $P_t(\xi)$ се врло природно појављује у опису кохомологије $H^*(\mathbb{P}(\xi))$ пројективизације раслојења ξ. Сасвим прецизно,

$$H^*(\mathbb{P}(\xi)) \cong H^*(B)[t]/(P_t(\xi))$$

или другим речима кохомологија од $\mathbb{P}(\xi)$ се добија из кохомологије базе $H^*(B)$ додавањем још једног генератора t градуације 1 и сечењем по главном идеалу генерисаном са $P_t(\xi)$. Класа t се интерпретира као Томова (R. Thom) класа канонског линијског раслојења над $\mathbb{P}(\xi)$.

Принцип расцепљивања: (Splitting principle) Свако "универзално" тврђење о S-W-класама је довољно доказати за случај раслојења која се разлажу на суму линијских (видети Последицу 1).

Пример 1: Докажимо да важи

$$Sq^1(w_m(\xi)) = w_1(\xi)w_m(\xi) + (m+1)w_{m+1}(\xi).$$

Заиста, ако се ξ разлаже на линијска раслојења онда је

$$w_m = \sigma_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ldots + x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m} + \ldots$$

и важи $Sq^1(\sigma_m) = \tau_{m+1}$ где је

$$\tau_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \ldots + (\sum_{k=1}^{m} x_{i_1}\cdots x_{i_k}^2\cdots x_{i_m}) + \ldots.$$

За крај доказа довољно је симетричну функцију τ_{m+1} изразити преко елементарних симетричних функција σ_j.

ЗАДАЦИ

1. Доказати да за сваку површ (компактну дводимензионалну многострукост) M важи релација

$$w_2(M) = w_1^2(M)$$

где је по дефиницији $w_j(M) = w_j(TM)$.

2. Доказати да за сваку компактну дводимензионалну многострукост M важи релација

$$\alpha \cup \alpha = w_1 \cup \alpha$$

за сваку класу $\alpha \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$.

3. Доказати да над кружницом S^1 постоје тачно два неизоморфна, n-димензионална, реална векторска раслојења. Једно је тривијално раслојење ϵ^n а друго је раслојење $\eta^1 \oplus \epsilon^{n-1}$ где је η^1 нетривијално (Мебијусово) једнодимензионално раслојење над S^1.

4. Доказати да за свака два реална раслојења E и F над B важи $w_1(E) = w_1(F)$ ако и само ако је $w_1(f^*(E)) = w_1(f^*(F))$ за свако пресликавање $f : S^1 \to B$. Како гласи одговарајуће тврђење за класу w_2?! **Напомена:** Корисно је знати да за свако пресликавање $f : X \to Y$ и класе $x \in H_k(X), y \in H^k(Y)$ важи $\langle y, f_*(x)\rangle = \langle f^*(y), x\rangle$.

5. Доказати да за сваку глатку, компактну 4-многострукост M важи релација

$$\alpha \cup \alpha = (w_2 + w_1^2) \cup \alpha$$

за сваку класу $\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$.

6. Ако су ξ и η два линијска (тј. једнодимензионална) раслојења и $\xi \otimes \eta$ њихов тензорски производ, доказати да важи

$$w_1(\xi \otimes \eta) = w_1(\xi) + w_1(\eta).$$

7. Одредити S-W-класе раслојења $E\otimes F$ као функције S-W-класа раслојења E и F.

8. Показати да за свака два линијска (1-димензионална), комплексна раслојења L_1 и L_2 над сфером S^2 важи

$$(L_1 \otimes L_2) \oplus \epsilon^1 \cong L_1 \oplus L_2.$$

Да ли овај изоморфизам важи ако се S^2 замени са S^4?!

9. Доказати да је $w_{2k+1}(\xi\oplus\xi) = 0$ за свако векторско раслојење ξ.

10. Доказати да за свако реално векторско раслојење ξ важи релација

$$Sq^2(w_n(\xi)) = w_2(\xi)\cup w_n(\xi) + \binom{n}{1} w_1(\xi)\cup w_{n+1}(\xi) + \binom{n}{2} w_{n+2}(\xi).$$

11. Показати да је за свако реално раслојење $\xi = \{E\to B\}$ над компактном базом B, постоји хомеоморфизам (локално компактних) простора

$$\mathbb{P}(\xi\oplus\epsilon^1)\setminus \mathbb{P}(\xi) \cong E.$$

Дедуковати одавде да је $\mathbb{P}(\xi\oplus\epsilon^1)/\mathbb{P}(\xi)$ хомеоморфан са Томовим простором $Th(\xi)$ од ξ и закључити да важи $H^*(\mathbb{P}(\xi\oplus\epsilon^1), \mathbb{P}(\xi)) \cong H^*(E, E_0)$. Дедуковати одавде да постоји кратак тачан низ

$$0 \to H^*(E,E_0) \xrightarrow{j} H^*(\mathbb{P}(\xi\oplus\epsilon^1)) \to H^*(\mathbb{P}(\xi)) \to 0$$

и показати да је $j(U) = P_t(\xi)$!

12. Показати да ако је многострукост N^n граница многострукости M^{n+1} да су онда сви S-W-бројеви многостуркости N једнаки нули. По дефиницији, S-W-број је $\langle x, [N]\rangle$ где је x нека n-димензионална карактеристична кохомолошка класа тангентног раслојења $T(N)$ и $[N]\in H_n(N)$ фундаментална хомолошка класа.

13.[1] Нека је $\xi = \{E \xrightarrow{\pi} B\}$ реално, n-димензионално векторско раслојење и m, p дати цели бројеви. Занима нас да ли се у овом раслојењу могу наћи $m+p$ непрекидних сечења $s_1, s_2, \ldots, s_{m+p}$ таквих да је међу њима бар m линеарно независних тј. да је ранг потпростора E_b генерисаним векторима $\{s_j(b)\}_{j=1}^{m+p}$ бар m за сваки $b\in B$. Доказати да је прва опструкција O (модуло 2) за решење овог проблема Stiefel-Whitney-јева класа дата формулом

$$O = det \begin{bmatrix} w_m & w_{m+1} & \ldots & w_{m+p} \\ w_{m-1} & w_m & \ldots & w_{m-p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m-p} & w_{m-p+1} & \ldots & w_m \end{bmatrix}$$

[1]**Наградни задатак:** Сви задаци са овог списка су "наградни"! По пропозицијама решење се прихвата ако је **уживо** изложено на неком од следећих састанака семинара и ако се семинар сагласи да је решење у реду! Рок за решавање наградних задатака је 1. септембар 2006.