Фанки (Fan Ky) теорема

ЦГТА-семинар, април-мај 2007

прво предавање (РадеедаР)

У овом чланку загледаћемо се „оком тополога“ у душу познате комбинаторне Ки Фан-ове теореме (Ky Fan). Као што је познато, теорема Ки Фана (или за ову прилику фанки теорема), генерализација је познате Такерове (Tucker) теореме (леме), која ја је у неком смислу рођак Шпернерове (Sperner) теореме (леме).

1 Такерова теорема

Теорема 1 (A.W. Tucker)**:** Претпоставимо да је n-димензионална лопта (диск) $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ тријангулисана тријангулацијом T која је централно симетрична на граници лопте (што значи да је тријангулација индукована на граници $\partial(D^n) \cong S^{n-1}$ инваријатна у односу на антиподалну инволуцију $x \mapsto -x$). Нека је

$$\lambda : V(T) \to \{+1, -1, +2, -2, \ldots, +n, -n\}$$

неко пресликавање дефинисано на скупу $V(T)$ теменена тријангулације које задовољава услов $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ за свако теме $v \in \partial(D^n)$ (услов симетричности на граници од D^n). Тада постоји ивица (1-симплекс) $\{u, v\}$ у тријангулацији T таква да је $\lambda(u) = -\lambda(v)$.

Шпернерова лема је измишљена са циљем да се пронађе комбинаторно извођење Брауерове теореме о непокретној тачки. Слично, Такерова лема нуди комбинаторни доказ Борсук-Уламове теореме (БУ). Веза између Теореме 1 и БУ-теореме успоставља се ако интерпретирамо означавање λ као пресликавање

$$\lambda' : V(T) \to \{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \ldots, e_n, -e_n\}$$

где је $\{e_j\}_{j=1}^n$ уобичајена ортонормирана база у $\mathbb{R}^n$. Пресликавање λ, дефинисано на теменима тријангулације T, једниствено се проширује до симплицијалног пресликавања $\Lambda : D^n \to \mathbb{R}^n$. Приметимо да је слика $\mathrm{Image}(\Lambda) \subset \Diamond^n$ где је хипероктаедар $\Diamond^n$ (cross-polytope) у $\mathbb{R}^n$ дефинисан као конвексни омотач

$$\Diamond^n := \mathrm{conv}\{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \ldots, e_n, -e_n\}.$$

Интерпретирајмо D^n као горњу полусферу S^n_+ n-димензионалне сфере S^n и већ задано пресликавање $\Lambda : S^n_+ \to \Diamond^n$ проширимо на доњу полусферу S^n_- тако да важи $\Lambda(-x) = -\Lambda(x)$ (ово је могуће јер Λ већ задовољава тај услов на граници $\partial(S^n_+) = \partial(D^n)$). Добијено пресликавање $\Lambda : S^n \to \Diamond^n$ по Борсук-Уламовој теореми има нулу, тј. тачку x такву да је $\Lambda(x) = 0$. Одавде се дедукује да нека ивица $\{u, v\}$ минималног симплекса у коме се тачка x налази, задовољава услов $\Lambda(u) = -\Lambda(v)$.

2 Ки Фанова теорема

Наша формулација Ки Фанове теореме се унеколико разликује од оригинала али се једноставно прелази из једне форме у другу.
Теорема (Ky Fan, Annals of Mathematic, 1952)**:** Нека је T антиподално симетрична тријангулација $(n-1)$-димензионалне сфере S^{n-1}. Претпоставимо да постоји симплицијално, $\mathbb{Z}_2$-еквивариантно пресликавање $\Lambda : S^n \to \partial(\Diamond^d)$ ове $(n-1)$-сфере у границу хипероктаедра $\Diamond^d$.

Питање 1: Ако је Такерова теорема последица Борсук-Уламове теореме, који тополошки принцип је одговроан за теорему Ки Фана!?

3 Хомологија пројективних простора

Тема је свима блиска и добро обрађена у литератури. Ипак ево неколико најважнијих чињеница.

Када желимо боље упознати неку многострукост, добра почетна стратегија је састављање „списка“њених интересатних подмногострукости. Нека је $P(U)$ пројективни простор асоциран са векторским простором $U \cong \mathbb{R}^n$. Ако је $V \cong \mathbb{R}^k$ векторски потпростор од U, онда је $P(V)$ $(k-1)$-димензионална подмногостуркост многострукости $P(U)$. За разне изборе од V, при чему је $k = 1, \ldots, n$, добијамо разне подмногострукости од $P(U)$ и основна опсервација је да су то и једине „интересантне“ подмногострукости од $P(U)$. Прецизним језиком речено:

(1) цикл $[P(V)]$ је генератор хомолошке групе $H_{k-1}(P(U)) \cong \mathbb{Z}_2$, дакле два различита, k-димензионална потпростора V и V' дефинишу исте $(k-1)$-димензионалне класе $[P(V)]$ и $[P(V')]$.

(2) Хомолошки $\cup$-производ ових класа је $[P(V)] \cap [P(V')] = [P(W)]$ уз претпоставку $\dim(V) = p$, $\dim(V') = q$ и $\dim(W) = p + q - n \geq 1$.

Ако је $x \in H^1(P(U); \mathbb{Z}_2)$ Поенкареов дуал хомолошке класе $[P(V)]$, где је $\dim(V) = n - 1$, онда се из (1) и (2) и дуалности хомологије и кохомологије лако доказује да је:

(3) класа $x^p \in H^p(P(U))$ Поенкареов дуал класе $[P(V)] \in H_{n-1-p}(P(U))$, где је $\dim(V) = n - p$.

(4) $H^*(P(U)) \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^n = 0)$.

4 Непарна момент крива

Момент крива у $\mathbb{R}^d$, дефинише се као скуп $\Gamma_d = \{\gamma(t) \mid -\infty < t < +\infty\}$ где је $\gamma(t) := (t, t^2, \ldots, t^d)$. Циклични политоп $C_{d,n}$ дефинише се као конвексни омотач $C_{d,n} = \operatorname{conv}\{\gamma(t_j) \mid t_1 < t_2 < \ldots < t_n\}$ за неки избор параметара t_j. Дефиниција је коректна јер комбинаторни тип политопа $C_{d,n}$ не зависи од конкретног избора бројева $t_i \in \mathbb{R}$.

Непарна момент крива Σ_d се дефинише као скуп $\Sigma_d := \{\sigma(t) \mid -\infty < t < +\infty\}$, где је $\sigma(t) := (t, t^3, \ldots, t^{2d-1})$. Дефинишимо „непарни“, односно централно симетрични циклични политоп $CC_{d,n}$ (за параметре $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_d$) као конвексни омотач

$$CC_{d,n} = \operatorname{conv}\{\sigma(t_j) \mid -t_n < \ldots < -t_1 < t_1 < \ldots < t_n\}.$$

Из централне симетричности политопа $CC_{d,n}$ следи $0 \in C_{d,n}$. Због тога је $0 \in \operatorname{conv}\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ за неки избор темена v_j политопа $CC_{d,n}$. Следећа лема прецизира под којим условима

$$0 \in \sigma := \operatorname{conv}\{\sigma(s_0), \sigma(s_1), \ldots, \sigma(s_d)\}$$

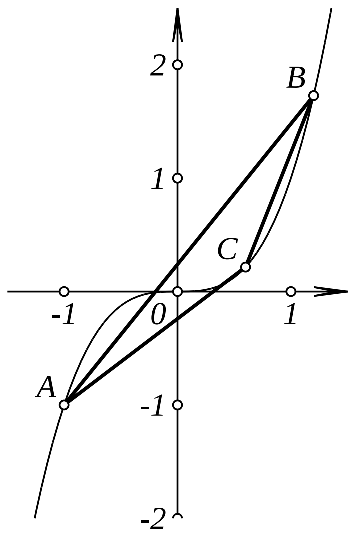
за неки избор параметара $s_0 < s_1 < \ldots < s_d$.

Лема 1: Релација

$$0 \in \sigma := \operatorname{conv}\{\sigma(t_0), \sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_d)\}$$

важи ако и само ако постоји низ $0 < s_0 < s_1 < \ldots < s_d$ такав да је низ $t_0, t_1, \ldots, t_d$ нека пермутација једног од следећа два низа:

$$s_0, -s_1, s_2, -s_3, \ldots, (-1)^d s_d \qquad - s_0, +s_1, -s_2, +s_3, \ldots, (-1)^{d+1} s_d.$$



Слика 1: Илустрација за Лему 1 (случај $d = 2$)

Доказ: Релација $0 \notin \operatorname{conv}\{v_1, v_2, \ldots, v_{d+1}\}$ је испуњена ако и само ако постоји хиперраван $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle a, x\rangle = 0\}$ таква да је симплекс $\sigma := \operatorname{conv}\{v_1, v_2, \ldots, v_{d+1}\}$ цео садржан у једном од асоцираних отворених полупростора. Ако је $a = (a_1, a_3, \ldots, a_{2d-1})$, онда је $\langle a, \sigma(t)\rangle = p(t)$ где је p непарни полином $p(t) = a_1 t + a_3 t^3 + \ldots + a_{2d-1} t^{2d-1}$. Одавде следи да је $0 \notin \operatorname{conv}\{\sigma(t_0), \sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_d)\}$ ако и само ако за неки непарни полином p важи $p(t_j) > 0$ за све $j = 0, 1, \ldots, d$. Дефинишимо $s_0 = |t_0|, s_1 = |t_1|, \ldots, s_d = |t_d|$ и (без губитка општости) претпоставимо да је $s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_d$ као и да је $t_0 \geq 0$. Према томе $s_j = \epsilon_j t_j$ за све j за неки избор $\epsilon_j \in \{-1, +1\}$. Према томе $0 \notin \operatorname{conv}\{\sigma(t_0), \sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_d)\}$ ако и само за неки непрани полином p важи знак$(p(s_j)) = \epsilon_j$ за све j.