”др Жан Ле”

CGTA-семинар, фебруар 2007
друго предавање (РадеедаР)

Пфафиан: Нека је $\omega \in \Lambda^2(V)$ 2-форма на векторском простору $V \cong \mathbb{R}^m$, тј. ω је антисиметрична, билинеарна форма $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$. Уколико је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ стандардни скаларни производ на $\mathbb{R}^m$, за сваку 2-форму ω постоји јединствена косо-симетрична матрица A ($A = -A^t$) таква да важи

$$\omega(x, y) = \langle Ax, y \rangle = y^t Ax \tag{1}$$

за сваки пар вектора $x, y \in V$. Ако је $A = [a_{ij}]$ онда се веза (1) између форме ω и матрице A може записати и на следећи начин:

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij}\, e^i \wedge e^j = \sum_{i<j} a_{ij}\, dx_i \wedge dx_j \tag{2}$$

где је $\{e_i\}_{i=1}^m$ стандардна ортонормирана база простора $V \cong \mathbb{R}^m$ и $\{e^j\}_{j=1} = \{dx_j\}_{j=1}^m$ одговарајућа дуална база дуалног простора V^*.

Дефиниција: Претпоставимо да је димензија постора V парна, $\dim(V) = m = 2n$. Пфафиан $P_\omega = P_A$ форме ω, тј. Пфафиан одговарајуће матрице A, дефинише се као јединствени реалан број $P \in \mathbb{R}$ такав да је

$$\omega^n = P \cdot dV \tag{3}$$

где је $dV = e^1 \wedge \ldots \wedge e^m = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \in \Lambda^m(V)$ волумен форма на V тј. јединствена m-форма таква да је $dV(e_1, \ldots, e_m) = 1$.

Став 1: Пфафиан је хомогени полином у варијаблама a_{ij}, експлицитно задан формулом:

$$P_\omega = P_A = \sum (-1)^\sigma a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n} \tag{4}$$

где се сумира по свим пермутацијама $\pi = (i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_n j_n)$ скупа $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ таквим да је $i_k < j_k$ за све k и $\sigma = \sigma(\pi)$ је знак пермутације π.

Доказ:

$$\begin{aligned} \omega^n &= (\textstyle\sum_{i<j} a_{ij}\, e^i \wedge e^j)^n \\ &= \textstyle\sum (a_{i_1 j_1}\, e^{i_1} \wedge e^{j_1}) \wedge (a_{i_2 j_2}\, e^{i_2} \wedge e^{j_2}) \wedge \ldots \wedge (a_{i_n j_n}\, e^{i_n} \wedge e^{j_n}) \\ &= \textstyle\sum a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_n j_n} (-1)^\sigma dV. \end{aligned}$$

За $n = 1$ и $n = 2$ добија се да је

$$P_A = a_{12} \quad \text{и} \quad P_A = 2(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}).$$

Напомена: Уочимо да је $P_A = n!\tilde{P}_A$ где је $\tilde{P}_A$ полином (са целим коефицијентима) који можемо звати “редуковани” Пфафиан матрице A. Пун комбинаторни смисао редукованог Пфафиана долази до изражаја ако приметимо да за њега важи аналогон формуле (4) у којој се сумира по свим *спаривањима* (matching) у комплетном графу K_{2n}.

Став 2: Пфафиан је полином инвариантан у односу на ротације амбиентног простора $\mathbb{R}^{2n}$ тј. за сваку ротацију $g \in SO(2n)$ важи $P_A = P_{gAg^t}$.

Доказ: Ако је $g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ онда је $\omega' = g^*\omega$ форма дефинисана са $\omega'(x,y) = \omega(gx, gy) = \langle A(gx), gy\rangle = y^t(g^tAg)x$ одакле следи да је $P_{g^*\omega} = P_{\omega'} = P_{g^tAg}$. Директним израчунавањем које понавља схему искоришћену у доказу Става 1, добија се да је

$$\begin{array}{rcl} (g^*\omega)^n & = & (\sum_{i<j} a_{ij}\, g^*e^i \wedge g^*e^j)^n \\ & = & \sum (a_{i_1j_1}\, g^*e^{i_1} \wedge g^*e^{j_1}) \wedge \ldots \wedge (a_{i_nj_n}\, g^*e^{i_n} \wedge g^*e^{j_n}) \\ & = & \sum a_{i_1j_1} \ldots a_{i_nj_n} (-1)^\sigma dV = \omega^n. \end{array}$$

Чињеница да је Пфафиан полином инвариантан у односу на групу $SO(2n)$ игра врло значајну улогу у Chern-Weil дескрипцији карактеристичних кохомолошких класа преко одговарајућих кривинских форми (видети нпр. J.W. Milnor, J.D. Stasheff, Characteristic Classes, Princeton Univ. Press 1974). Заиста, ако је $E = TM$ тангентно раслојење орјентабилне многострукости $M = M^{2n}$ и $\Omega = [\Omega_{ij}]$ кривина асоцирана са неком конексијом, тј. матрица одговарајућих 2-форми, онда је

$$P(\Omega) := \sum (-1)^\sigma \Omega_{i_1j_1} \ldots \Omega_{i_nj_n}$$

глобална $2n$-форма на M чија de Rham-ова кохомолошка класа је Ојлерова класа (Gauss-Bonnet-ова теорема).

Королар (Става 2)**:**

$$\det(A) = (P_A)^2.$$

Доказ: С обзиром да су и лева и десна страна горње једнакости инваријантне у односу на дејство групе $SO(2n)$, можемо претпоставити да је матрица A у блок-дијагоналној форми тј. да је $A = \mathrm{diag}(D_1, \ldots, D_n)$ где је

$$D_j = \left[\begin{array}{cc} 0 & a_j \\ -a_j & 0 \end{array}\right].$$

У овом случају лако се проверава да је $\det(A) = (a_1 \ldots a_n)^2$ као и да је $P_A = a_1 \ldots a_n$. $\square$

Пфафиан P_ω је дефинисан само ако је амбиентни простор V парне димензије. С обзиром да је у непарном случају $(m = 2n+1)$

$$\det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = -\det(A) = 0$$

могло би рећи да је у овом случају $P_A = 0$. Важније је да се Пфафиан на есенцијалан начин појављује у дескрипцији језгра $\mathrm{Ker}(A)$ (генеричке) косо-симетричне матрице A.

Став 3: Претпоставим да је $A : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ косо-симетрична матрица. Тада је $V_A \in \mathrm{Ker}(A)$ где је

$$V_A = (P_1, P_2, \ldots, P_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$$

и P_j је Пфафиан матрице добијене брисањем из матрице A j-те врсте и j-те колоне.

Доказ: Генерична (тј. типична) косо-симетрична матрица A има особину да је $\mathrm{Ker}(A)$ 1-димензионалан простор. Довољно је тврђење доказати у овом случају јер се свака друга матрица може по вољи добро апроксимирати оваквим матрицама.

Као и пре матрица A је асоцирана са 2-формом ω дефинисаном са $\omega(x, y) = \langle Ax, y \rangle$. Ако је $0 \neq X \in \mathrm{Ker}(A)$ неки базни вектор (нека је нпр. $\|X\| = 1$), онда је по дефиницији $\omega(X, Z) = 0$ за сваки $Z \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Покажимо да за неки скалар $\lambda \in \mathbb{R}$ важи

$$\omega^n = \lambda \cdot (X \lrcorner\, dV) \tag{5}$$

где је dV волумен форма а $X \lrcorner\, \tau$ операција контракције форме τ вектором X дефинисана са

$$X \lrcorner\, \tau(Z_1, \ldots, Z_p) := \tau(X, Z_1, \ldots, Z_p).$$

Једнакост (5) је довољно проверити на неком ортонормираном базису $X, Z_1, \ldots, Z_{2n}$ простора $\mathbb{R}^{2n+1}$ који садржи вектор X. Обе стране једнакости (5) су 0 ако се као аргумент појављује вектор X. С друге стране једнакост

$$\omega^n(Z_1, \ldots, Z_{2n}) = \lambda \cdot (X \lrcorner\, dV)(Z_1, \ldots, Z_{2n})$$

сигурно важи за неки скалар λ пошто је $X \lrcorner\, dV$ есенцијално волумен форма дефинисана на ортогоналном комплементу од X.

За крај доказа Става 3 довољно је приметити да је

$$\omega^n = (\sum_{i<j} a_{ij}\, e^i \wedge e^j)^n = V_A \lrcorner\, dV$$

као да из једнакости $X_1 \lrcorner\, dV = X_2 \lrcorner\, dV$ следи једнакост $X_1 = X_2$. $\square$