др Жан Ле

CGTA-семинар, фебруар 2007
прво предавање (др А.Е.)

Две неједнакости: Геометризацијом две класичне неједнакости (које!?) добијају се следеће релације у којима се на природан начин појављују дуалност међу конвексним скуповима ($K \mapsto K^\circ$) и дуаланост међу конвексним функцијама ($f \mapsto f^*$)

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\|_K \cdot \|y\|_{K^\circ}$$

$$\langle x, p\rangle \leq f(x) + f^*(p).$$

Дуал f^* конвексне функције f везује се за име Лежандра (Adrien-Marie Legendre (1752-1833)) као и за име Фенхела (W. Fenchel).

Основни мотив за овај циклус од три предавања је жеља да се осветли несвакидашњи феномен да Лежандрова трансформација игра веома важну улогу у механици и физици (веза између Лагранжовог и Хамилтоновог формализма) и у геометрији конвексних функција. Покушаћу да изложим у свој својој транспаретности основни варијациони принцип (трећа лекција) који читаоца (студента и талентованог али необавештеног професора[1]) може да подржи у уверењу да је увек лепо научити нешто ново као и да читање књига "из средине" и није тако лоша идеја[2].

О дуалности: "Мајка свих дуалности" је вероватно релација $W \mapsto W^\perp$ која сваком потпростору W еуклидског простора $V \cong \mathbb{R}^n$ додељује њему ортогонални потпростор $W^\perp$. Ова дуалност у магновењу (по истом рецепту) производи дуалност одговарајућих грасманових многострукости $D : G_k(\mathbb{R}^n) \longleftrightarrow G_{n-k}(\mathbb{R}^n)$. Фокусирајмо се на случај $k = 1$, тј. на дуалност пројективног простора правих $P(V) = P(\mathbb{R}^n) \cong G_1(\mathbb{R}^n)$ и пројективног простора $P(V^*) \cong G_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ свих хиперравни у $\mathbb{R}^n$. Нека су W_1 и W_2 две хипперравни у $\mathbb{R}^n$ које не пролазе кроз координатни почетак. Афини простор W_1 природно се може интерпретирати као потпростор (координатна карта) од $P(V)$ тако што се свакој тачки $x \in W_1$ додели права $p(x, 0) \in P(V)$ кроз координатни почетак. Слично, свакој хипперравни $H \in W_2$ додељује се хиперраван $h(H, 0) \in P(V^*)$ која садржи H и пролази кроз координатни почетак. Означимо са $Hip(W_1)$ простор (многострукост) свих хиперравни у W_2. Дуалност $D : P(V) \to P(V^*)$ индукује (парцијално дефинисано) пресликавање $P : W_1 \to Hip(W_2)$. Уз помоћ овог пресликавања (зовемо га "преводилац преликавање") посматрач из "света тачака" W_1 комуницира са посматрачом из "света хиперравни" W_2 (односно $Hip(W_2)$).

[1] Са ким се и сам скрушено идентификујем.

[2] У нашем случају реч је о књизи *В. Арнолд, Математички методи класичне механике, Москва "Наука" 1989.*

Преводилац пресликавања: За тренутак фокусирајмо се на случај $n = 3$. У овом случају преводилац преликавање $P = P_{W_1,W_2}$ успостављa парцијалну бијекцију између "света тачака" W_1 и "света правих" $Hip(W_2)$.

На пример ако узмемо да је $\mathbb{R}^2 \cong W_1 = W_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ онда је свакој тачки $A = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ додељена права $P(A) = p \subset \mathbb{R}^2$ која има карактеристично својство да ако је $A' \in p$ тачка најближа координатном почетку O, онда су тачке A, A' и O колинеарне и важи $OA \cdot OA' = 1$. Другим речима тачки $A \neq 0$ одговара права чија је једначина $\langle A, x \rangle = -1$.

Наравно све ово остаје неизмењено и у општем случају у ком постоји преводилац пресликавање (дуалност) које свакој тачки $z \in \mathbb{R}^n$ различитој од 0 додељује праву p која не пролази кроз координатни почетак и чија је једначина $\langle z, x \rangle = 1$ (промена знака овде није од већег значаја). Одавде па до дефиниције поларног скупа $K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (\forall z \in K)\, \langle z, x \rangle \leq 1\}$ је само један корак[3]. Прва неједнакост са почетка ове лекције је непосредна последица ако се узме да је $\|x\|_K$ "функционал Минковског" (функција удаљености, ibid. стр. 81) асоциран конвексном телу K дефинисан са $\|x\|_K := \inf\{\lambda > 0 \mid \lambda x \in K\}$.

[3]Видети детаљније у књизи, *С. Врећица, Конвексна анализа, Математички факултет Београд, 1993.*