# О путевима и речима

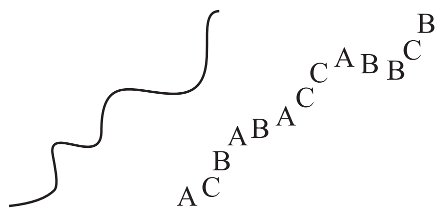
## 15 минута теорије група

Раде едаР

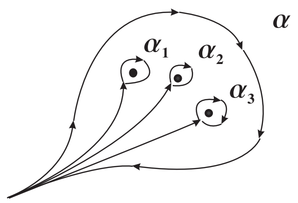
јануар 2009

Кажу да је писање један вид путовања. Путовање је то интересантније што мање знате о пределима којима путујете. Дакле треба писати, ако хоћете да у томе стварно уживате, само о ономе о чему не знате ништа . . .
. . . и пошто сви пишу а нико не чита, допустио бих себи слободу и задовољство да нарушим, поред граматичких, и неке друге норме доброг писања и уљудног презентовања математичких идеја. Написаћу чланак на горе задату тему пишући о нечему сасвим другом при том остајући довољно близак полазној теми, толико близак да ни сам не приметим да сам "забраздио" и удаљио се од главне теме . . .

(из необјављеног есеја)




**Мотивација 1:** Сличица 1 приказује како се пут $\alpha$ који обилази три препреке (кружића) декомпонује (у оквиру фундаменталне групе $\pi_1(*, X)$ амбијентног простора) у производ $\alpha = \alpha_3 * \alpha_2 * \alpha_1$. Сличице попут ове појављују се често у топологији, геометрији, анализи, па чак и у комбинаторици (сетимо се Кошијеве, Стоксове и других теорема где се интеграл по једној контури приказује као сума интеграла по другим (једноставнијим) контурама).




Слика 1:

**Мотивација 2:** Идеја разлагања путева на простије путеве, онако као што се реч разлаже на слова или слогове, појављује се и у другим ЦГТА[1]-причама и темама. Наш основни циљ у овом есеју је да демонстрирамо примену овог принципа у теорији група кроз доказ следеће теореме:

[1]ЦГТА = име семинара, "Combinatorics in Geometry, Topology, and Algebra".

**Теорема 1:** *Нека је* $\Gamma := \langle c_A, c_B, c_C \rangle$ *група свих изометрија еуклидске равни* $\mathbb{R}^2$ *генерисана са три централне симетрије такве да центри симетрије* $A, B, C$ *нису колинеарни. Тада постоји изоморфизам*

$$\Gamma := \langle c_A, c_B, c_C \rangle \cong \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = e, abc = cba \rangle \tag{1}$$

*Другим речима свака релација међу генераторима* $a = c_A, b = c_B, c = c_C$ *групе* $\Gamma$, *последица је релација* $a^2 = b^2 = c^2 = e, (abc)^2 = e$ *и аксиома теорије група.*

**Напомена 1:** Проблем да ли се нека релација $R(x_1, \ldots, x_n) = e$ међу генераторима $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неке групе може дедуковати из неких других релација $R_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = R_m(x_1, \ldots, x_n) = e$ алгоритамски је неодлучив, тј. не постоји алгоритам који би функционисао за сваки избор релација. Другим речима "проблем речи" (word problem) у теорији група је у општем случају неодлучив (undecidable). Из доказа Теореме 1 видеће се да постоји јасан и леп, геометријски мотивисан алгоритам одлучивости у случају групе задане релацијама (1).

**Задатак 1:** Уверити се да ако у некој групи $G$ за нека три елемента $a, b, c$ важи

$$a^2 = b^2 = c^2 = e \qquad abc = cba$$

да онда важе и релације $\quad bca = acb,\ cab = bac.$

# 1 Централне симетрије и друге изометрије

Нека је $Isom(\mathbb{R}^2)$ група свих изометријских трансформација равни. Примери изометрија, елемената ове групе су:

(1) $\quad c_X =$ централна симетрија у односу на тачку $X \in \mathbb{R}^2$,

(2) $\quad s_p =$ симетрија (рефлексија) у односу на праву $p \subset \mathbb{R}^2$,

(3) $\quad t_{\overrightarrow{AB}} =$ транслација за вектор $\overrightarrow{AB}$,

(4) $\quad R_{X,\alpha} =$ ротација око тачке $X$ за угао $\alpha$
(у позитивном смеру ако је угао позитиван).

Комбиновањем ових изометрија добијају се често занимљиви идентитети, међу њима и следећи:

$(I_1)$ $\quad c_Q \circ c_P = t_{2\overrightarrow{PQ}}$,

$(I_2)$ $\quad s_q \circ s_p = R_{X,\alpha}$ $\quad$ ако је $p \cap q = \{X\}$ и $\alpha = 2\measuredangle(p, q)$

$(I_3)$ $\quad$ Ако је $K \in Isom(\mathbb{R}^2)$ онда је

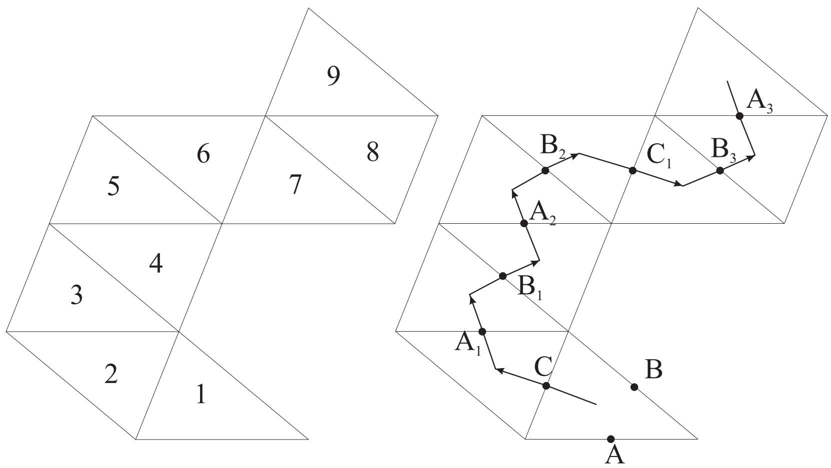
(a) $\quad K \circ c_P \circ K^{-1} = c_{K(P)}$ $\qquad$ (b) $\quad K \circ s_p \circ K^{-1} = s_{K(p)}$

(c) $\quad K \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ K^{-1} = t_{A'B'}$ где је $A' = K(A)$ и $B' = K(B)$

(d) $\quad K \circ R_{P,\alpha} \circ K^{-1} = R_{K(P),\pm\alpha}$,
при чему је знак "$+$" ако $K \in Isom(\mathbb{R}^2)$ чува орјентацију и "$-$" у супротном случају.

## 2 Геометрија групе $\Gamma = \langle c_A, c_B, c_C \rangle$

Нека су $A, B, C$ три неколинеарне тачке у равни. Означимо (помало неортодоксно) са $\nabla ABC$ троугао коме су тачке $A, B, C$ средине одговарајућих страна (видети троугао бр. 1 на Слици 2 десно). Нека су $a = c_A, b = c_B, c = c_C$ одговарајуће централне симетрије и $\Gamma = \langle c_A, c_B, c_C \rangle \subset Isom(\mathbb{R}^2)$ подгрупа групе изометрија генерисана овим централним симетријама.




Слика 2:

Свака изометрија $K \in Isom(\mathbb{R}^2)$ потпуно је одређена ако су познате слике $K(A), K(B), K(C)$ средина страна базног троугла $\nabla ABC$. На пример изометрија $K_9$ која пресликава троугао 1 (Слика 2) на троугао 9 лако се идентификује као транслација $K_9 = t_{6\overrightarrow{AB}}$.

Уочимо неки пут који повезује троугао 1 са троуглом 9 (Слика 2, десно), нпр. можемо (али не морамо) узети изломљену линију која повезује барицентре (тежишта) суседних троуглова. Сваки такав пут природно задаје факторизацију изометрије $K_9$ у производ централних симетрија. На пример пут на Слици 2 даје нам релацију:

$$K_9 = t_{6\overrightarrow{AB}} = c_{A_3} \circ c_{B_3} \circ c_{C_1} \circ c_{B_2} \circ c_{A_2} \circ c_{B_1} \circ c_{A_1} \circ c_C \tag{2}$$

Приметимо да се и описани пут $\alpha$ који води од троугла 1 до троугла 9, и асоцирана факторизација (2), могу кратко записати (кодирати) као реч

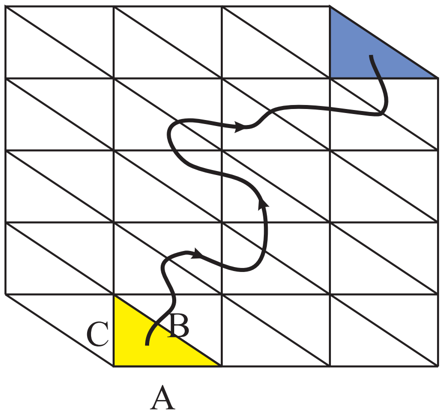
$$\alpha = ABCBABAC \tag{3}$$

Заиста, довољно је обрисати бројеве у индексима на десној страни једнакости (2). Ово је наравно могуће захваљујући изабраној нотацији; тачке $A, A_1, A_2, A_3$ припадају дужима истих дужина, слично важи за тачке $B, B_1, B_2, B_3$ итд.

Још прегледније се смисао тог кодирања види на Слици 3. На тој слици раван је поплочана правоуглим троугловима. Основни троугао $\nabla ABC$ (троугао жуте боје, тј. доњи леви осенчени троугао) повезан је са плавим троуглом (горњи десни осенчени троугао) путањом која је кодирана уз помоћ речи

$$\alpha = ABCBCBACABCBAB.$$

Заиста, хипотенузе одговарају централним симетријама типа $B$, дуже катете производе централне симетрије типа $A$ и коначно кратке катете дају централне симетрије типа $C$.




Слика 3:

**Кључно питање:** Ако је пут од базног троугла $\nabla ABC$ до неког другог троугла поплочавања равни приказаног на Слици 3 кодиран уз помоћ речи

$$\alpha = X_1X_2\dots X_m, \qquad X_i \in \{A, B, C\},$$

која реч

$$K = Y_1Y_2\dots Y_k, \qquad Y_i \in \{c_A, c_B, c_C\}$$

описује асоцирану изометрију као производ генератора $c_A, c_B, c_C$!?

**Магични принцип:** Реч $Y_1Y_2\dots Y_k$ није ништа друго него реч $X_1X_2\dots X_m$ написана у обрнутом поретку (специјално важи $k = m$), уз претпоставку да смо успоставили бијекцију

$$A \leftrightarrow c_A \qquad B \leftrightarrow c_B \qquad C \leftrightarrow c_C.$$

На пример из релација (2) и (3) следи факторизација

$$\begin{aligned} K_9 = t_{6\overrightarrow{AB}} &= c_{A_3} \circ c_{B_3} \circ c_{C_1} \circ c_{B_2} \circ c_{A_2} \circ c_{B_1} \circ c_{A_1} \circ c_C \\ &= c_C \circ c_A \circ c_B \circ c_A \circ c_B \circ c_C \circ c_B \circ c_A \\ &= cababcba \end{aligned} \tag{4}$$

**Доказ:** Доказ "магичног принципа" је изненађујуће једноставан иако, "руку на срце", ни после прочитаног доказа човеку није сасвим јасно какав је то алгебарско-геометријски "хокус-покус"!?

Доказ се изводи индукцијом. За случај речи $\alpha = X_1$ од једног слова тврђење је очевидно. Претпоставимо да смо се у тачност тврђења уверили за све речи дужине мање од $m$ и нека је $\alpha = X_1X_2\dots X_m$, $X_i \in \{A, B, C\}$ нека реч дужине $m$ и $L$ одговарајућа изометрија коју ова реч кодира. На пример, ради одређености, можемо посматрати слику 2 и претпоставити да је $m = 8$, тј. да нас занима како да се (примарна) декомпозиција изометрије $L = K_9$ описана једнакошћу (2) аутоматски преводи (читањем унатрашке као у (4)) у декомпозицију преко базних централних симетрија $c_A, c_B, c_C$.

Нека је $\beta = X_2\dots X_m$ и $K$ асоцирана изометрија (на Слици 2 то је изометрија $K_8$ која преводи троугао 1 у троугао 8). По индуктивној претпоставци знамо да је $K = c_{X_m} \circ \dots \circ c_{X_2}$. По дефиницији $L = c_{K(X_1)} \circ K$ (на Слици 2 је $X_1 = A$) и коначно, коришћењем прве $(I_3)$-релације из Главе 1 добијамо

$$L = c_{K(X_1)} \circ K = K \circ c_{X_1} \circ K^{-1} \circ K = K \circ c_{X_1}$$

тј. слово $X_1$ је са првог отишло на последње место. $\square$

# 3 Припрема за доказ Теореме 1

Пред нашим очима група $\Gamma = \langle c_A, c_B, c_C\rangle$ се потпуно отворила! Из доказа "магичног принципа", а уз претпоставку да троугао $\nabla ABC$ није једнакокраки, следи да је,

- $\bullet_1$ група $\Gamma$ ништа друго него група свих изометрија $K \in Isom(\mathbb{R}^2)$ које чувају асоцирано поплочавање равни правоуглим троугловима (Слика 3).

Правило генерисања речи у алфабету $a, b, c$ које одговарају елементима групе $\Gamma$ а везују се за путање (непрекидне путеве $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$) који полазе из базног (плавог) троугла, заслужује да га још једном експлицитно поновимо.

- $\bullet_2$ Реч у алфабету $a, b, c$ асоцирана путањи $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, написана с лева на десно и означена са Реч$(\alpha)$, добија се ако се кретањем по $\alpha$ у позитивном смеру сваки пресек са већом катетом "прочита" као $a$, пресек са хипотенузом као $b$ и пресек са малом катетом као $c$.

Проблем речи за групу $\Gamma$ је одлучив. Заиста, свака реч $R$ у алфабету $a, b, c$ производи једну путању $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ у датом поплочавању (као у сликама 2 и 3) која повезује базни троугао $\nabla ABC$ са неким другим троуглом $\Delta$. Одавде закључујемо да

- $\bullet_3$ у групи $\Gamma$ важи релација $R = e$ ако и само ако је асоцирана путања затворена, тј. ако је $\Delta = \nabla ABC$.

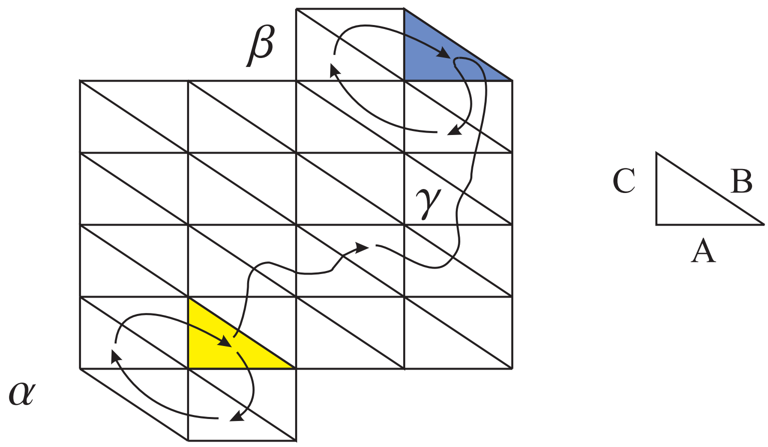
**Напомена 2:** Ознаку Реч$(\alpha)$ обично користимо ако су полазни $\triangle_1 = \nabla ABC$ и долазни $\triangle_2 = \Delta$ троугао јасни из контекста. У општем случају за сваку путању $\alpha$ која повезује троуглове $\triangle_1$ и $\triangle_2$ асоцирана реч се означава са Реч$_{\triangle_1}^{\triangle_2}(\alpha)$.

**Задатак 2:** Нека је $\alpha$ путања која повезује троуглове $\triangle_1$ и $\triangle_2$, $\beta$ путања која повезује троуглове $\triangle_2$ и $\triangle_3$ а $\gamma := \beta * \alpha$ путања која повезује троуглове $\triangle_1$ и $\triangle_3$ добијена надовезивањем (композицијом) путања $\alpha$ и $\beta$. Доказати да важи релација

$$\text{Реч}_{\triangle_1}^{\triangle_3}(\gamma) = \text{Реч}_{\triangle_1}^{\triangle_3}(\beta * \alpha) = \text{Реч}_{\triangle_2}^{\triangle_3}(\beta) * \text{Реч}_{\triangle_1}^{\triangle_2}(\alpha). \tag{5}$$

где се операција $*$ међу речима интерпретира као надовезивање (дописивање) речи.

Применимо у пракси ове принципе на неколико примера припремајући се за доказ Теореме 1. Покажимо за почетак да у групи $\Gamma$ стварно важи релација $abc = cba$ или еквивалентно, у светлу релација $a^2 = b^2 = c^2 = e$, релација $(abc)^2 = e$. Заиста, непосредно се уверавамо да је $(abc)^2 = \text{Реч}(\alpha)$, где је $\alpha$ затворена путања приказана на Слици 4 која полази из базног (жутог) троугла и враћа се у њега обилазећи приказани шестоугао у позитивном смеру.




Слика 4:

Следећа тврђења су такође једноставна последица релације (5) односно "магичног принципа" који стоји иза ње.

**Тврђење 1:** Нека је $\alpha : \triangle_1 \to \triangle_2$ путања која повезује троуглове $\triangle_1$ и $\triangle_2$. Нека је $K \in Isom(\mathbb{R}^2)$ било која изометрија која чува поплочавање равни $\mathbb{R}^2$ троугловима. Нека је $\beta = K(\alpha)$ слика путање $\alpha$ при изометријској трансформацији $K$, специјално важи $\beta : \triangle_3 \to \triangle_4$ где је $\triangle_3 = K(\triangle_1)$ и $\triangle_4 = K(\triangle_2)$. Тада је

$$\text{Реч}(\alpha) := \text{Реч}_{\triangle_1}^{\triangle_2}(\alpha) = \text{Реч}_{\triangle_3}^{\triangle_4}(\beta) =: \text{Реч}(\beta). \tag{6}$$

**Тврђење 2:** Претпоставимо да је у Тврђењу 1 $\triangle_1 = \triangle_2$, тј. да је $\alpha : \triangle_1 \to \triangle_1$ затворена путања. Нека је $\gamma : \triangle_1 \to \triangle_3$ било која путања таква да Реч$(\gamma)$ у групи $\Gamma$ репрезентује изометрију $K$. Тада путања $\gamma^{-1} * \beta * \gamma : \triangle_1 \to \triangle_1$ репрезентује у $\Gamma$ елемент који је коњугован елементу Реч$(\alpha)$.

# 4 Крај доказа Теореме 1

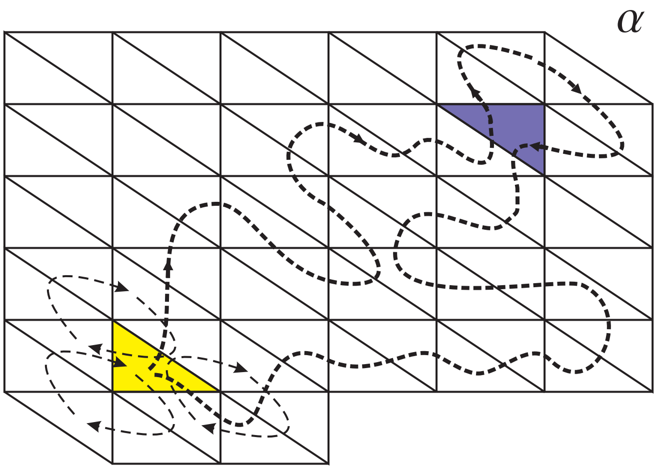
Нека је $\Gamma_1 := \langle c_A, c_B, c_C \rangle \cong \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = e, abc = cba \rangle$. Пошто у групи $\Gamma := \langle c_A, c_B, c_C \rangle$ важе релације

$$c_A^2 = c_B^2 = c_C^2 = e, \qquad c_A \circ c_B \circ c_C = c_C \circ c_B \circ c_A$$

пресликавање $a \mapsto c_A, b \mapsto c_B, c \mapsto c_C$ се шири до хомоморфизма група $f : \Gamma_1 \to \Gamma$. Из чињенице да су $c_A, c_B, c_C$ генератори групе $\Gamma$ следи да је $f$ епиморфизам. Остаје да се докаже да је $f$ мономорфизам, тј. да из претпоставке $f(R) = e$, за неку реч $R$ у алфабету $a, b, c$, следи да је $R$ последица дефиниционих релација

$$a^2 = b^2 = c^2 = e, \qquad abc = cba. \tag{7}$$

Нека је $\alpha : \triangle_1 \to \triangle_1$ затворена путања таква да је Реч$(\alpha) = R$. На пример нека $\alpha$ "тачкаста" путања која на Слици 5 полажи из доњег левог (жутог) троугла $\triangle_1$ и пролази кроз осенчени горњи десни (или плави) троугао $\triangle_2$.




Слика 5:

Прикажимо путању $\alpha$ као композицију $\alpha = \alpha_3 * \alpha_2 * \alpha_1$ где је $\alpha_1 : \triangle_1 \to \triangle_2$ почетни део путање $\alpha$ који води од "жутог" до "плавог" троугла, $\alpha_2 : \triangle_2 \to \triangle_2$ део у елементарном шестоуглу који садржи плави троугао и $\alpha_3 : \triangle_2 \to \triangle_1$ завршни део путање $\alpha$ који води од плавог до жутог троугла. Нека је $\beta := \alpha_1^{-1} * \alpha_2 * \alpha_1$ и $\gamma := \alpha_3 * \alpha_1$. Одавде добијамо једнакост

$$\alpha = (\alpha_3 * \alpha_1) * (\alpha_1^{-1} * \alpha_2 * \alpha_1) = \gamma * \beta$$

Изаберимо плави троугао тако да је реч $\gamma$ краће дужине од речи $\alpha$.

Приметимо да је Реч$(\beta)$, на основу Тврђења 1 и 2, последица основних дефиниционих релација (7). Заиста, из Тврдњења 1 следи да је Реч$(\alpha_2)$ једна од речи асоцираних елементарним шестоугловима, тј. једна од речи

$$(abc)^2, \qquad (bca)^2, \qquad (cab)^2$$

или њима инверзних речи $(cba)^2, (acb)^2, (bac)^2$. За крај довољно је применити индуктивну претпоставку по којој је реч $\gamma$ последица релација (7).