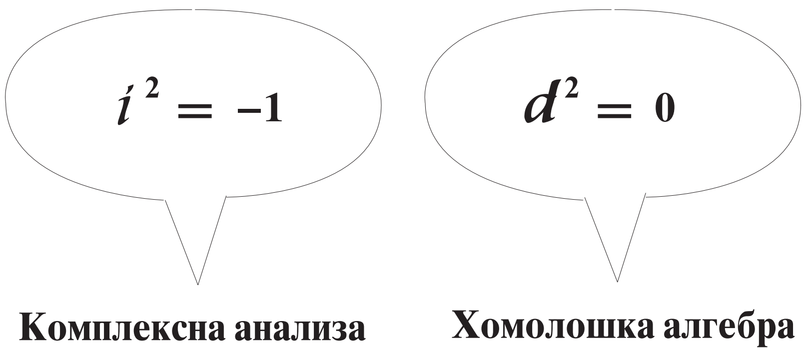
15 минута комплексне анализе 15 минута диференцијалних форми

2. децембар 2008

РадеедаР

Благонаклони читатељу/читатељко,

Пред Вама су два 15-минутна курса (видети наслов) посвећена комплексној анализи и интеграцији диференцијалних форми. Ове микро-курсеве никако не треба схватити као замену за озбиљније получасовне, вишечасовне или вишедневне мини-курсеве и унапред се ограђујем (Caveat Emptor) упозорењем да владање материјалом овог микро-курса не гарантује успешно полагање испита из наведених предмета (чак ни по новим "Bologna"-програмима).



Слика 1:

Слика 1 симболизује комплесну анализу и хомолошку алгебру (која укључује и рачун диференцијалних форми), прву као дисциплину везану за једначину $x^2 = -1$, другу као дисциплину коју симболизује једначина $x^2 = 0$. Смисао и значај једначине $i^2 = -1$ за комплексну анализу (у облачићу лево на Слици 1) јасан је сам по себи. У облачићу десно d је операција диференцирања која (као операција над диференцијалним формама) задовољава услов $d^2 = 0$. Значај ове операције за хомолошку алгебру и математику у целини најлепше одражавају следеће речи Анри Картана (Henry Cartan) изговорене при додели титуле почасног доктора Оксфордског универзитета:

- ... utinam intelligere possim rationacinationes pulcherrimas quae e propositione concisa DE QUADRATUM NIHILO EXAEQUARI fluunt.
- ... Желио бих разумети најјасније последице једнакости $d^2 = 0$.

Подесите ваше штоперице на 15 минута. Крећемо ...!

1 Комплексно диференцирање и холоморфне функције

1.1 Реалне функције реалне промењиве

$\bullet_{11}$ Посматрајмо све реалне функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које се могу описати формулом у којој учествују (уз реалне бројеве као константе) и следеће операције

$$" + "," - "," \cdot "," \div ", \text{ (сабирање, одузимање, множење, дељење)} .$$

Сасвим је јасно да се на тај начин добијају све рационалне функције и само оне.

$$\text{Пример:} \quad f(x) = \frac{2-x}{x^3 - 4x + 1}.$$

$\bullet_{12}$ Посебно су значајне функције које се добијају коришћењем само прве 3 операције. То су (наравно) полиноми $p(x) \in \mathbb{R}[x]$.

$$\text{Пример:} \quad p(x) = x^3 - 2x^2 - 7.$$

$\bullet_{13}$ Међу операцијама над функцијама $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по значају се издвајају "диференцирање" и "интегрирање"

$$f'(x) = \frac{df}{dx} := \lim_{t \mapsto 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

$$\int_a^b f(t)\, dt := \lim_{a = x_0 < \ldots < x_n = b} \{ f(x_0)(x_1 - x_0) + \ldots + f(x_n)(x_n - x_{n-1}) \}.$$

где се лимес у (Римановом) интегралу узима по свим одговарајућим интегралним сумама.

$\bullet_{14}$ Полиноми и рационалне функције нису једине диференцијабилне функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ али се свака довољно глатка (диференцијабилна) функција може (локално) апроксимирати полиномима (Тејлорова формула).

1.2 Комплексне функције комплексне промењиве

$\bullet_{21}$ Посматрајмо све комплексне функције $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ које се могу описати формулом у којој учествују (уз комплексне бројеве као константе) и следеће операције

$$" + "," - "," \cdot "," \div ","\overline{\cdot}" \text{ (конјугација } z \mapsto \overline{z} \text{ је нова операција)} .$$

$$\text{Пример:} \quad f(x,y) = \frac{2 - z\overline{z} + \overline{z}^3}{\overline{z}^2 z - 7\overline{z} + 3z^5 + 2 - i}, \quad z := x + iy.$$

$\bullet_{22}$ Посебно су интересатне функције које се добијају коришћењем свих наведених операција осим дељења " $\div$ ". То су полиноми $q(z,\overline{z}) \in \mathbb{C}[z,\overline{z}]$ са комплексним коефицијентима и две варијабле z и $\overline{z}$. Приметимо да се, с обзиром на једнакости

$$\begin{array}{ll} z = x + iy & x = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) \\ \overline{z} = x - iy & y = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}) \end{array} \tag{1}$$

сваки полином $q(z,\overline{z})$ може на јединствен начин написати као полином $p(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$.

Фундаментално питање комплексне анализе!

Питање: Који полиноми $p(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ имају особину да када се запишу у форми $q(z,\overline{z})$ уопште не зависе од $\overline{z}$, тј. у њиховом "$z,\overline{z}$"-запису варијабла $\overline{z}$ се уопште не појављује!?

Одговор: $q(z,\overline{z})$ не зависи од $\overline{z}$ ако и само ако је

$$\frac{\partial q}{\partial \overline{z}} = 0$$

где је (у светлу линеарних смена (1))

$$\frac{\partial q}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial y}\right).$$

Закључак: Да би одредили да ли је полином $p(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ записив у облику $p(x,y) = r(z)$ где је $r(z) \in \mathbb{C}[z]$, потребно је и довољно израчунати парцијалне изводе $\frac{\partial p}{\partial x}$ и $\frac{\partial p}{\partial y}$ и проверити да ли важи

$$\frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Шта је то холоморфна функција!?

Све горе речено за полином $p(x,y)$ има смисла и за сваку диференцијабилну функцију $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. За такву функцију кажемо да је **холоморфна** (у тачки $(a,b) \in \mathbb{R}^2$) ако (у тој тачки) задовољава услов

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0. \tag{2}$$

Функција f је холоморфна у области $U \subset \mathbb{C}$ ако је холоморфна у свакој тачки те области.

Покушајмо да разјаснимо смисао услова (2). Већ знамо да ако је $f(x,y)$ полином или рационална функција, онда њена холоморфност гарантује да је она полином (рационална функција) која зависи само од z (а не од $\overline{z}$). У општем случају имамо сличан закључак. Довољно је да се сетимо да је $f(x,y)$ увек (локално) апроксимирана полиномом $p_n(x,y)$ степена n (Тејлорова формула). Услов $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ повлачи услов $\frac{\partial p_n}{\partial \overline{z}} = 0$. Одавде добијамо да је f холоморфна ако се апроксимира полиномима $p_n(z)$ који зависе само од z (а не од $\overline{z}$).

Холоморфне функције = комплексно диференцијабилне функције

Ево још једног погледа на холоморфност неке функције. Диференцијал функције f има облик

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$$

где је $dz := dx + idy$ и $d\overline{z} := dx - idy$. Одавде се упоређивањем поново долази до формуле (2) као и до формуле

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{3}$$

Услов холоморфности $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ еквивалентан је услову $df = gdz$ за неку функцију g. Закључујемо да за неки $c \in \mathbb{C}$ важи $f(x) - f(a) = c(x-a) + O(|x-a|^2)$ одакле непосредно изводимо следећи важан закључак.

Закључак: Ако је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ холоморфна функција онда постоји лимес

$$f'(a) := \lim_{z \mapsto a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}. \tag{4}$$

Задатак 1: Одредити за које од следећих функција $f(z)$ лимес (4) постоји и ако постоји одредити извод $f'(z)$:

$$(a)\, f(z) = \overline{z}, \quad (b)\, f(z) = z^3, \quad (c)\, f(z) = z \cdot \overline{z}, \quad (d)\, f(z) = \sin(z).$$

Задатак 2: Свака глатка функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ је облика $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ где су u и v две глатке реалне функције. Показати да је услов холоморфности (2) еквивалентан пару услова (**Коши-Риманови услови**)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5}$$

Најважније својство холоморфних функција!!!

Најважније својство холоморфне функције дефинисане у (просто повезаној) области $U \subset \mathbb{C}$ је једнакост интеграла

$$\int_{\Gamma_1} f\, dz = \int_{\Gamma_2} f\, dz$$

где су Γ_1 и Γ_2 две глатке криве које полазе из исте тачке $a \in U$ и завршавају се у истој тачки $b \in U$ (независност интеграла холоморфне функције од пута интеграције).

За доказ и додатна објашњења видети следећи микро-курс од 15 минута!

2 Диференцијалне форме и Стоксова формула

Шта је форма,
Шта је форма танка,
Дал' је санак сенке,
Ил' та сенка санка.

Шта је то диференцијална форма!?

Диференцијална форма је сваки израз облика $P\,dQ$ где су P и Q функције. Другим речима (елементарна) диференцијална форма је производ функције и деференцијала неке друге функције. По договору диференциалне форме су и суме елементарних диференцијалних форми.

Примери: $f\,dz$, dR, $P\,dx + Q\,dy$, $g\,d\bar{z} + h\,dy$, итд.

Из контекста ће бити јасно где је диференцијална форма дефинисана. На пример врло често ћемо посматрати диференцијалне форме $P\,dQ$ где су P и Q диференцијабилне фунције дефинисане у некој области $U \subset \mathbb{C}$ са вредностима у $\mathbb{C}$.

Нове примере добијамо ако посматрамо (глатке) функције f и g дефинисане на неком интервалу $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Диференцијална форма $f\,dg$ је оно што видимо иза знака интеграла у формули

$$\int_a^b f(x)\,dg(x). \tag{6}$$

Подсетимо се дефиниције овог интеграла (видети $\bullet_{13}$ из прве лекције). По дефиницији интеграл (6) је гранична вредност (интегралних) сума облика

$$f(x_1)(g(x_1)-g(x_0))+f(x_2)(g(x_2)-g(x_1))+\ldots+f(x_n)(g(x_n)-g(x_{n-1})).$$

У случају глатких функција $P, Q : U \to \mathbb{C}$ на врло сличан начин се дефинише интеграл

$$\int_\gamma P\,dQ \tag{7}$$

дуж неке глатке криве $\gamma : [0, 1] \to U$ као гранична вредност интегралних сума

$$P(x_1)(Q(x_1) - Q(x_0)) + \ldots + P(x_n)(Q(x_n) - Q(x_{n-1})) \tag{8}$$

где је $x_j := \gamma(t_j)$ и $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$.

Пошто дуж криве γ важи $dQ = Q'(t)dt$, интеграл (8) се одмах своди на "обични" интеграл,

$$\int_0^1 P(\gamma(t)) \cdot Q'(\gamma(t))dt.$$

Чему служе диференцијалне форме!?

Већ смо у неком смислу у претходним редовима начели одговор на то питање. Диференцијална форма је израз који се може интегралити дуж неке криве γ. Форма $\omega = P\,dQ$ садржи тачно ону информацију потребну за формирање одговарајућих интегралних сума (8) што непосредно води ка дефиницији интеграла (7). Горе је показано да се такав интеграл брзо може свести на "обичан" интеграл функције једне промењиве. То нас никако не сме заварати. Ово свођење је само један (и то "brute force") начин за израчунавање интеграла (7). Сам интеграл (7) уноси (у шаховском жаргону) једну велику теоретску новост! Када год добијемо две (глатке) функције P и Q, дефинисане на правој или у равни, на глаткој површи, у простору или било каквој другој глаткој многострукости (односно у било каквом амбијенту где има смисла говорити о глатким функцијама и глатким кривим), можемо формирати интегралне суме (8) и дефинисати интеграл (7).

Класичан пример

$\bullet_{31}$ Посматрајамо интеграл

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\, dx \tag{9}$$

где је $P(x)$ неки полином а R рационална функција.

$\bullet_{32}$ На пример ако желимо израчунати дужину лука елипсе са полуосама a и b долазимо до интеграла

$$I(x) = a\int_0^x \frac{1-k^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

где је $k := (a^2 - b^2)/a^2$.

$\bullet_{33}$ Или ако желимо израчунати дужину *лемнискате* долазимо до интеграла

$$I(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

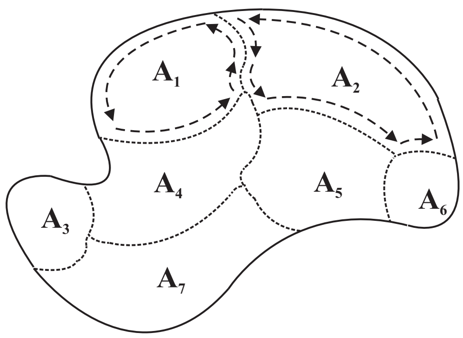
$\bullet_{34}$ Револуција у разумевању интеграла типа (9) наступила је када је Нилс Хенрик Абел (а пре и после Гаус, Јакоби, Риман, и др.) почео систематски да анализира интеграл $\int_\gamma R(x,y)\,dx$, као интеграл диференцијалне форме $\omega = R(x,y)\,dx$ задане на алгебарској кривој (Римановој површи) $C = \{(x,y) | y^2 = P(x)\} \subset \mathbb{C}^2$.

Стоксова теорема

Стоксова теорема је најважнији резултат из теорије интеграције диференцијалних форми. Формулација и доказ овог тврђења (у пуној генералности) може се наћи у свакој књизи у којој се говори о диференцијалним (глатким) многострукостима, специјално у књигама посвећеним диференецијалној топологији и геометрији (нпр. у монографији *В. Драговић, Д. Милинковић, Анализа на многострукостима: примене у геометрији, механици, топологији, Београд, Математички факултет 2003*). P. Griffiths у књизи Introduction to algebraic curves формулише Стоксову теорему (Теорема 5.5) за случај 1-форми али не даје доказ. Даћемо скицу доказа ове теореме који потпуно расветљава њену суштину и који нам допушта да одгонетнемо како су о оваквим резултатима размишљали и како су их употребљавали знаменити физичари и математичари (Maxwell, Stokes, Thomson, Остроградски и др.).

Теорема: Нека је $U \subset \mathbb{R}^2$ нека затворена, просто повезана (без "рупа") област у $\mathbb{R}^2$ (видети Слику 2). Нека је ∂U граница области U схваћена као крива која обилази област у смеру обрнутом од казаљке на сату. Нека су $P, Q : U \to \mathbb{R}$ (или $P, Q : U \to \mathbb{C}$) две глатке функције дефинисане на U и нека је $\omega = P\,dx + Q\,dy$ одговарајућа форма дефинисана на U. Тада важи следећа једнакост (Гринова формула)

$$\text{(10)} \qquad \int_{\partial U} [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = \int\int_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$



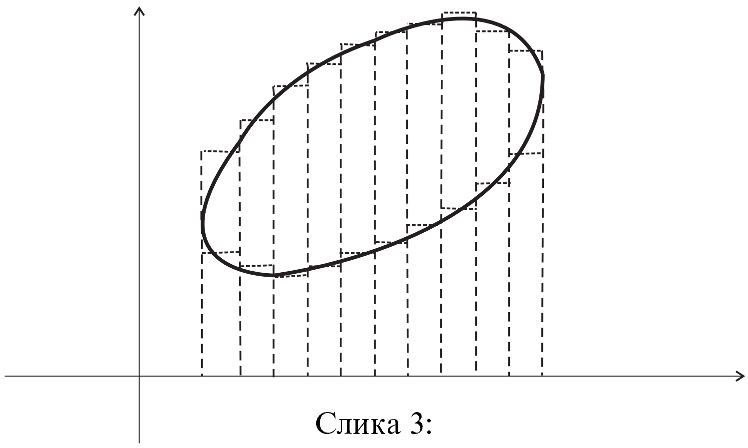
Слика 2:

Са леве стране формуле (10) је интеграл диференцијалне форме ω а са десне обични двоструки интеграл (или ученије речено интеграл 2-форме $d\omega$). Дакажимо формулу (10) постепено. Поћићемо од једноставних, готово тривијалних случајева, да би се показало да и општи случај није тако далеко.

- $\bullet_{41}$ Претпоставимо да је $\omega = dR = \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy$ за неку диференцијабилну функцију $R(x,y)$ дефинисану на U. Непосредно се уверавамо да су и лева страна (написати одговарајућу суму (8)) и десна страна једнакости (10) једнаке нули. Као тривијана последица добија се да је формула (10) тачна ако су P и Q константе!

$\bullet_{42}$ Посматрајмо сада случај $P(x,y) = x, Q(x,y) = 0$. Пошто је $P(x,y)\,dx = x\,dx = 1/2\,d(x^2)$ закључујемо на основу $\bullet_{41}$ да су обе стране једнакости (10) једнаке 0. Сличан закључак имамо и у симетричном случају $P(x,y) = 0, Q(x,y) = y$.

$\bullet_{43}$ Сада долази случај $P(x,y) = y, Q(x,y) = 0$ (као и симетричан случај $P(x,y) = 0, Q(x,y) = x$). Ово је врло садржајан случај који, као што ће се видети, у потпуности разоткрива смисао формуле (10). Доказ је једноставан. Са десне стране једнакости (10) појављује се површина области U (са знаком " $-$ " у случају $P(x,y) = 0, Q(x,y) = y$). Исти резултат се добија и на левој страни што непосредно следи из дефиниције. Заиста, као што се види на Слици 3, одговарајућа интегрална сума (8) природно се интерпретира као сума површина правоугаоника са горњим основама "на граници" области U.



Слика 3:

$\bullet_{44}$ За крај доказа довољно је уверити се да се обе стране једнакости (10) понашају адитивно (за случај леве стране то следи из Слике 2). Дакле дозвољено је област U разбити на сасвим мале области (области $A_1, A_2, ...$ итд. на Слици 2). У области A_j функција $P(x,y)$ се може (до на инфинитезимале вишег реда) апроксимирати линеаном функцијом $P'(x,y) = a + bx + cy$ (слично важи и за функцију $Q(x,y)$) и тврђење с онда своди на $\bullet_{41}, \bullet_{42}$ и $\bullet_{43}$.

Задатак 3: Коришћењем Коши-Риманових једнакости (Задатак 2) доказати "најважније својство холоморфних функција" формулисано на стани 4.

Задатак 4: Доказати генералисану Кошијеву формулу

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)}{z-\zeta}\,d\overline{z}dz$$

где је $f : U \to \mathbb{C}$ диференцијабилна функција. Специјално ако је f холоморфна други сабирак нестаје и добијамо обичну форму Кошијеве теореме.