15 минута торусних варијетета

Београд, март 2010

РадеедаР

Благонаклона читатељко/читатељу,

Пред Вама је још један 15-минутни мини-курс[1], овога пута са темом из теорије *торусних варијетета*. Као и пре, упозоравамо да ове микро-курсеве никако не треба схватити као замену за озбиљније получасовне, вишечасовне или вишедневне мини-курсеве и унапред се ограђујем (Caveat Emptor) упозорењем да владање материјалом овог микро-курса не гарантује успешно полагање испита из алгебарске геометрије[2]. Ипак популарност и очевидне предности ових курсева, на пример атрактивна могућност да се математички факултет симболично заврши за 24 сата, навели су ме на то да наставим са педагошким радом. Може се спекулисати да ћемо у будућности бити у могућности да понудимо и друге врло атрактивне програме високог нивоа као што су „магистратура летњи дан до подне ", „докторска дисертација од доручка до ручка ", „како написати инстант научни рад", „будите сами свој ментор и члан комисије "итд., али је за сада рано да се о томе јавно говори.

Подесите ваше штоперице на 15 минута. Крећемо ...!

1 Вишедимензионалне геометријске прогресије

Геометријска прогресија

$$1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^n \quad \dots \tag{1}$$

је један од лепих објеката нашег раног математичког образовања са којим се и данас радо дружимо. Нема тога ко није осетио топлину у души при погледу на бесконачну суму

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2. \tag{2}$$

Погледаћемо на геометријске прогресије (скраћено г.п.) са алгебарске тачке гледишта са циљем да ухватимо идеју водиљу која ће нас повести у свет *вишедимензионалних геометријских прогресија*. По дефиницији геометријска прогресија је пресликавање $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ које задовољава услове

$$(i) \quad f(0) = 1 \qquad (ii) \quad f(i+j) = f(i)f(j). \tag{3}$$

[1]За сада постоје 15-минутни курсеви из комплексне анализе, диференцијалних форми, теорије група, а надам се да ће их бити још, нпр. из интеграбилних динамичких система.

[2]Иако је до мене стигао глас да је један наш студент, чије име из разумљивих разлога не откривамо, навођењем ових курсева у свом Curriculum Vitae оставио веома снажан утисак на пријемну комисију једног угледног светског универзитета.

Другим речима $f \in \operatorname{Hom}((\mathbb{N},+),(\mathbb{C},\cdot))$ је *хомоморфизам* из адитивне полугрупе $(\mathbb{N},+)$ у мултипликативну полугрупу $(\mathbb{C},\cdot)$.

Дефиниција 1. *Нека је $(A,+)$ било каква адитивна полугрупа са неутралним елементом 0. Комплексна* геометријска прогресија *над A је по дефиницији било који хомоморфизам $f \in \operatorname{Hom}(A,\mathbb{C})$, тј. било које пресликавање $f : A \to \mathbb{C}$ које задовољава услове* (3).

Приметимо да ако је $h : A \to B$ хомоморфизам полугрупа, нпр. ако је A подполугрупа од B и h инклузија, онда постоји природно пресликавање

$$\hat{h} : \operatorname{Hom}(B,\mathbb{C}) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A,\mathbb{C}) \tag{4}$$

дефинисано са $\hat{h}(f) = h \circ f$. На пример у случају да је A подполугрупа од B онда је $\hat{h}$ рестрикција геометријске прогресије над B на подполугрупу A.

Примери 2.

(1) Геометријска прогресија над $\mathbb{Z}$

$$\dots \quad x^{-2} \quad x^{-1} \quad 1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^n \quad \dots$$

је исто што и хомоморфизам $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

(2) Геометријска прогресија над $\mathbb{N}^2 = (\mathbb{N}^2,+)$ је било које пресликавање $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$ које задовољава услове (3). Одавде следи да је $f(p,q) = x^p y^q$ за неке комплексне бројеве $x, y \in \mathbb{C}$. Слично, геометријска прогресија над $\mathbb{Z}^2$ је задана истом таквом формулом уз услов $(x,y) \in (\mathbb{C}^*)^2$ где је $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(3) Генералније, свака г.п. над $\mathbb{N}^k$ је задана формулом $f(p_1,p_2,\dots,p_k) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_k^{p_k} =: x^p$ за неки $x \in \mathbb{C}^k$ и као у (2) услов $x^p \in (\mathbb{C}^*)^k$ издваја геометријске прогресије над $\mathbb{Z}^k$.

Задатак 0.1. *Описати геометријске прогресије над* $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

Задатак 0.2. *Нека је $A \subset \mathbb{Z}^2$ полугрупа. Доказати да је $f : A \to \mathbb{C}$ геометријска прогресија над A ако и само ако је $f(0) = 1$ и за сваки паралелограм $PQRS$ коме су темена у A важи*

$$f(P) \cdot f(R) = f(Q) \cdot f(S).$$

Читалац који воли језик теорије категорије приметиће да смо пошли од категорије абелових полугрупа и да смо у Дефиницији 1 (видети (4)) задали функтор из те категорије у категорију скупова (тополошких простора!?).

1.1 Неортодоксно множење матрица

Већ се из горе наведених формула види да је матрични језик врло погодан за описивање и рад са геометријским прогресијама. На пример формула из Примера 2-(2) се може написати и овако

$$f(p,q) \quad = \quad x^p y^q \quad = \quad [x \quad y] \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^{\sharp}$$

али под условом да се множење матрица интерпретира на други начин.

Конвенција о $\sharp$-множењу матрица: Производ две матрице A и B се као и обично означава са AB или $A \cdot B$. Међутим ако је B матрица са целим коефицијентима дефинишемо и (десни) $\sharp$-производ $A \cdot_{\sharp} B = A \cdot B^{\sharp}$ тако што се све операције подигну за једну степеницу навише сагласно следећем правилу:

$$x \cdot_{\sharp} m := x^m \qquad x +_{\sharp} y := x \cdot y \qquad x \cdot_{\sharp} m +_{\sharp} y \cdot_{\sharp} n = x^m y^n, \quad \text{итд.}$$

На пример,

$$[x \quad y] \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{\sharp} = [x^3y^2 \quad x^{-1}y^5].$$

У практичним применама као и обично поједностављујемо запис када год је то могуће тако да ћемо понекада изостављати знак $\sharp$.

Задатак 0.3. *Доказати да за сваку матрицу X и две матрице A и B са целим коефицијентима важи закон асоцијативности обичног и $\sharp$-множења*

$$X \cdot_{\sharp} (A \cdot B) = (X \cdot_{\sharp} A) \cdot_{\sharp} B.$$

1.2 Полугрупе асоциране са конусима

Нека је $K \subset \mathbb{R}^d$ конвексни конус са врхом у 0, тј. било какав подскуп од $\mathbb{R}^d$ затворен у односу на конвексне комбинације и хомотетије,

$$(\forall x, y \in K)(\forall \mu \geq 0)(\forall \lambda \in [0,1]) \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in K \quad \text{и} \quad \mu x \in K.$$

Скуп $A_K := \mathbb{Z}^d \cap K$ је адитивна полугрупа за сваки конвексни конус $K \subset \mathbb{R}^d$.

Пример 3. Нека је $K = \mathrm{Pos}\{a^{(1)}, a^{(2)}\} = \{\lambda a^{(1)} + \mu a^{(2)} | \lambda, \mu \geq 0\}$ конвексни конус у $\mathbb{R}^2$ разапет векторима $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ који чине базу од $\mathbb{Z}^2$. Тада је $A = A_K = K \cap \mathbb{Z}^2$ подполугрупа од $\mathbb{Z}^2$ генерисана векторима $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$.

Пример 4. У димензији $d = 1$ имамо само 4 различита конвексна конуса $K_0 = \{0\}, K_+ = [0, +\infty), K_- = (-\infty, 0]$ и $K = \mathbb{R}$. Одговарајуће полугрупе су $A_0 = \{0\}, A_+ = \mathbb{N}, A_- = -\mathbb{N}$ и $A = \mathbb{Z}$.

2 Афини варијетет $Geo(A)$

Уведимо, супротно класичном принципу парсимоније, још једно сугестивно име за простор свих геометријских прогресија над полугрупом A.

Дефиниција 5. *Скуп* $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$ *свих геометријских прогресија над* A *има природну структуру тополошког простора као подпростор простора функција из* A *у* $\mathbb{C}$. *Означимо овај простор (варијетет) са* $Geo(A)$.

Као што Примери 2 показују простор $Geo(A)$ се у пракси лако идентификује за разне абелове полугрупе A. Поред тога сваком хомоморфизму $h : A \to B$ одговара *непрекидно* пресликавање $\hat{h} : Geo(B) \to Geo(A)$.

На пример ако су $e_+ : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ и $e_- : -\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ очевидна улагања добијамо дијаграм

$$\begin{tikzcd} Geo(-\mathbb{N}) \arrow[d, "f(-1)"'] & Geo(\mathbb{Z}) \arrow[l, "\hat{e}_-"'] \arrow[r, "\hat{e}_+"] \arrow[d, "f(+1)"] & Geo(\mathbb{N}) \arrow[d, "f(+1)"] \\ \mathbb{C} & \mathbb{C}^* \arrow[l] \arrow[r] & \mathbb{C} \end{tikzcd} \tag{5}$$

Приметимо да су оба пресликавања $\hat{e}_-$ и $\hat{e}_+$ инјекције које допуштају да се $Geo(\mathbb{Z})$ види као подпростор оба простора $Geo(-\mathbb{N})$ и $Geo(\mathbb{N})$. Ако је $x = f(1)$ координата у десној а $y = f(-1)$ координата у левој копији од $\mathbb{C}$ из релације $f(+1)f(-1) = 1$ добијамо $y = 1/x$. Одавде закључујемо да се слепљивањем простора $Geo(-\mathbb{N})$ и $Geo(\mathbb{N})$ дуж заједничког подпростора $Geo(\mathbb{Z})$ добија сфера $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (Риманова сфера!).

2.1 $Geo(A)$ за разне $A \subset \mathbb{Z}^2$

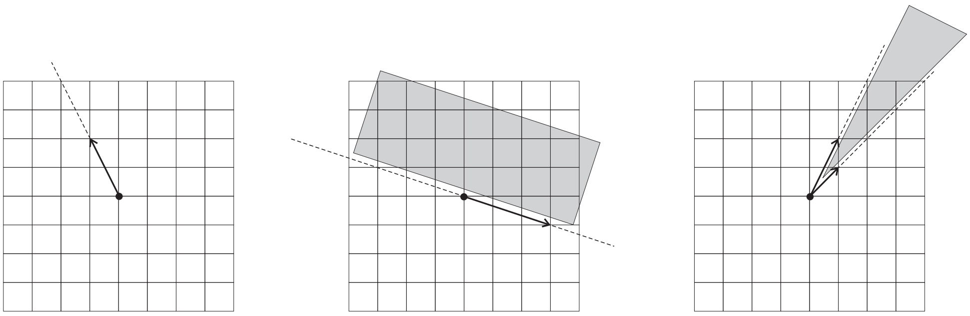
Претходни пример дијаграма (5) из ког је слепљивањем (преласком на колимес) добијена Риманова сфера, први је наговештај да би се аналогним поступцима из других градивних простора $Geo(A)$ могле добити занимљиве многострукости!

Као припремни корак за њихову кострукцију анализираћемо детаљније случај $d = 2$, тј. случај абелових подполугрупа $A \subset \mathbb{Z}^2$.

Фокусираћемо се на основна три типа подполугрупа. Први тип или тип (I) су полугрупе ранга 1 генерисане неким примитивним вектором $a \in \mathbb{Z}^2$. Тип (II) су полугрупе $A_K = P \cap \mathbb{Z}^2$ где је P неки полупростор чија је гранична права генерисана неким примитивним вектором $b \in \mathbb{Z}^2$. Трећи тип или тип (III) су полугрупе ранга два дефинисане у Примеру 3. Неформално можемо (према асоцираном конусу) први тип звати „тип полуправе”, други тип „тип полуравни”и трећи тип „тип исечка”(Слика 1).

Задатак 0.4. *Показати да је*

$$Geo(A) \cong \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{Ако је } A \text{ типа (I)} \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}, & \text{Ако је } A \text{ типа (II)} \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C}, & \text{Ако је } A \text{ типа (III)} \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*, & \text{Ако је } A = \mathbb{Z}^2. \end{cases}$$



Слика 1: Полугрупе сва три типа.

Ако су A и B две полугрупе онда по правилу међу њима има много разних хомоморфизама а самим тим и индукованих пресликавања међу просторима $Geo(A)$ и $Geo(B)$. У неким случајевим се ипак могу издвојити канонска пресликавања међу Geo-просторима, нпр. ако је $A \subset B$ и ако је $e : A \to B$ инклузионо пресликавање, онда је $\hat{e} : Geo(B) \to Geo(A)$ рестрикција геометријске прогресије над B на подполугрупу A. Специјално ако је $B = \mathbb{Z}^2$ добијамо да постоји канонско пресликавање $\hat{e}_A : (\mathbb{C}^*)^2 = Geo(\mathbb{Z}^2) \to Geo(A)$ за сваку полугрупу $A \subset \mathbb{Z}^2$.

Задатак 0.5. *Показати да је пресликавање $\hat{e}_A : (\mathbb{C}^*)^2 = Geo(\mathbb{Z}^2) \to Geo(A)$ непрекидна инјекција за сваку полугрупу $A \subset \mathbb{Z}^2$ типа (II) или типа (III).*

Следеће тврђење је од велике важности за разумевање торусних варијетета.

Став 6. *Нека је $A \subset \mathbb{Z}^2$ полугрупа типа* (I), (II) *или* (III). *Означимо са $K = \mathrm{Pos}(A)$ асоцирани конвексни конус (Слика 1). Изаберимо хомоморфизам $v : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ задан формулом $v(p_1, p_2) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$ за неке $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ и нека је $u = v \circ e_A : A \to \mathbb{Z}$ композиција са канонском инклузијом e_A. Нека је $C = \hat{u} : \mathbb{C}^* \to Geo(A)$ асоцирано пресликавање. Тада лимес*

$$\lim_{t \mapsto 0} C(t)$$

постоји у $Geo(A)$ ако и само ако је вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in K^\vee$ елемент дуалног конуса $K^\vee$ од K.

Доказ: Тврђење важи и у већој генералности али га ми доказујемо само у за нас најважнијем случају полугрупа типа (III), тј. полугрупа типа исечка (Слика 1). Претпоставимо, као у Примеру 3 да је полугрупа A генерисана векторима $a^{(1)}, a^{(2)} \in \mathbb{Z}^2$.

По дефиницији $\hat{v}(t)$ је г.п. $f_t : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ за коју важи $f_t(e_1) = t^{\alpha_1}$ и $f_t(e_2) = t^{\alpha_2}$. Одавде следи да је за сваки $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$

$$f_t(a) = \begin{bmatrix} t^{\alpha_1} & t^{\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^\sharp = t^{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2} = t^{\langle \alpha, a \rangle}.$$

По дефиницији $C(t)$ је рестрикција од f_t на A одакле следи, с обзиром да су $x = f_t(a^{(1)})$ и $y = f_t(a^{(2)})$ координате на $\mathbb{C}^2 \cong Geo(A)$, да је

$$x = t^{\langle \alpha, a^{(1)} \rangle} \quad \text{и} \quad y = t^{\langle \alpha, a^{(2)} \rangle}.$$

Пошто је $C(t) = (x, y)$ закључујемо да $\lim_{t \mapsto 0} C(t)$ постоји у $Geo(A)$ ако и само ако је $\langle \alpha, a^{(1)} \rangle \geq 0$ и $\langle \alpha, a^{(2)} \rangle \geq 0$ што важи ако и само ако је $\alpha \in K^{\vee}$. $\square$

Последица 7. *Ако је $A \subset \mathbb{Z}^2$ полугрупа типа* (I), (II) *или* (III) *онда се на основу информације о свим непрекидним пресликавањима облика*

$$\hat{u} : Geo(\mathbb{Z}) \to Geo(A)$$

за све могуће хомоморфизме $u : A \to \mathbb{Z}$, може реконструисати полугрупа A.

2.2 Слепљивање многострукости $Geo(A)$

За сваку полугрупу $A \subset \mathbb{Z}^2$ задана је природна инклузија $e_A : A \to \mathbb{Z}^2$ и индуковано пресликавање $\hat{e}_A : Geo(\mathbb{Z}^2) \to Geo(A)$ је непрекидна инјекција (Задатак 0.5). Претпоставимо да су A и B две полугрупе типа (III) одакле следи (Задатак 0.4) да је $Geo(A) \cong Geo(B) \cong \mathbb{C}^2$. Посматрајмо дијаграм,

$$\text{(6)} \qquad \begin{array}{ccccc} Geo(A) & \xleftarrow{\hat{e}_A} & Geo(\mathbb{Z}^2) & \xrightarrow{\hat{e}_B} & Geo(B) \\ {\scriptstyle f(a^{(1)})}\big\downarrow{\scriptstyle f(a^{(2)})} & & {\scriptstyle f(e_1)}\big\downarrow{\scriptstyle f(e_2)} & & {\scriptstyle f(b^{(1)})}\big\downarrow{\scriptstyle f(b^{(2)})} \\ \mathbb{C}^2 & \xleftarrow[P_A]{} & (\mathbb{C}^*)^2 & \xrightarrow[P_B]{} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

где су P_A и P_B пресликавања дефинисана тако да дијаграм буде комутативан.

Колимес дијаграма

$$\text{(7)} \qquad Geo(A) \longleftarrow Geo(\mathbb{Z}^2) \longrightarrow Geo(B)$$

је пример *торусног варијетета*, односно пример простора добијеног слепљивањем (идентификацијом) једноставних (афиних) варијетета $Geo(A)$ и $Geo(B)$. Упознајмо се поближе са овим примером.

Пресликавања P_A и P_B су се имплицитно већ појавила у доказу Става 6. Ако је $f \in Geo(\mathbb{Z}^2)$ онда су $t_1 = f(e_1)$ и $t_2 = f(e_2)$ координате ове г.п. у $(\mathbb{C}^*)^2$, $x_1 = f(a^{(1)})$ и $x_2 = f(a^{(2)})$ њене координате у $\mathbb{C}^2 \cong Geo(A)$, и $y_1 = f(b^{(1)})$, $y_2 = f(b^{(2)})$ координате у $\mathbb{C}^2 \cong Geo(B)$. Геометријска прогресија f у матричној нотацији се записује као

$$f(p) = f(p_1 e_1 + p_2 e_2) = t_1^{p_1} t_2^{p_2} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}^{\sharp}.$$

Одавде се одмах добија

$$[x_1 \;\, x_2] = [f(a^{(1)}) \;\, f(a^{(2)})] = [t_1 \;\, t_2][a^{(1)} \;\, a^{(2)}]^{\sharp} = [t_1 \;\, t_2]\bar{A}. \tag{8}$$

где је $\bar{A} = [a^{(1)} \;\, a^{(2)}] \in GL(2,\mathbb{Z})$ целобројна, инвертибилна (2×2)-матрица. Одавде закључујемо да је $P_A(f) = [t_1 \;\, t_2]\bar{A}$ а сличне формуле важе и за $Geo(B)$,

$$P_B(f) = [y_1 \;\, y_2] = [t_1 \;\, t_2]\bar{B}.$$

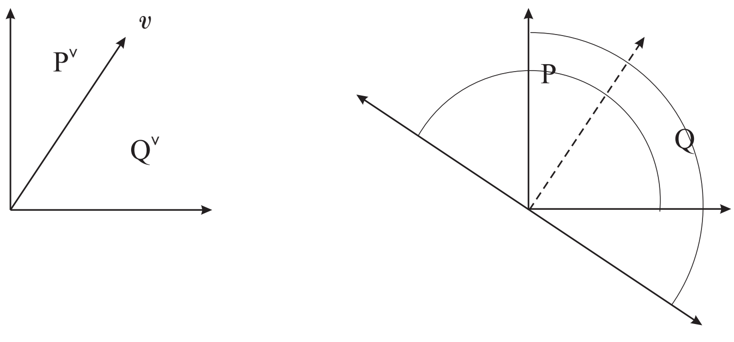
Као последицу добијамо формулу прелаза из координата $Geo(B)$ у координате од $Geo(A)$

$$[x_1 \;\, x_2] = [y_1 \;\, y_2]\bar{B}^{-1}\bar{A}.$$

Важна опсервација 1: Простор $X_{A,B} = Geo(A)_{P_A}\cup_{P_B} Geo(B)$, дефинисан као колимес дијаграма (7), не мора бити Хаусдорфов! Заиста Став 6 даје потребан услов јер ако је $C : \mathbb{C}^* \to Geo(\mathbb{Z}^2) = (\mathbb{C}^*)^2$ пресликавање задато са $t \mapsto (t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2})$ онда $\lim_{t\mapsto 0} C(t)$ не сме постојати и у $Geo(A)$ и у $Geo(B)$!

Претпоставимо да су $P = Pos(A)$ и $Q = Pos(B)$ асоцирани конуси и $P^\vee$ и $Q^\vee$ њихови дуали. Из Става 6 следи да ако желимо да $X_{A,B}$ буде Хаусдорфов простор конуси $P^\vee$ и $Q^\vee$ морају бити дисјунктни.

Важна опсервација 2: Претпоставимо да су унутрашњости конуса $P^\vee$ и $Q^\vee$ дисјунктни али да они имају заједничку изводницу (Слика 2) генерисану примитивним целобројним вектором $v = (v_1, v_2)$ У овом случају простор $X_{A,B}$



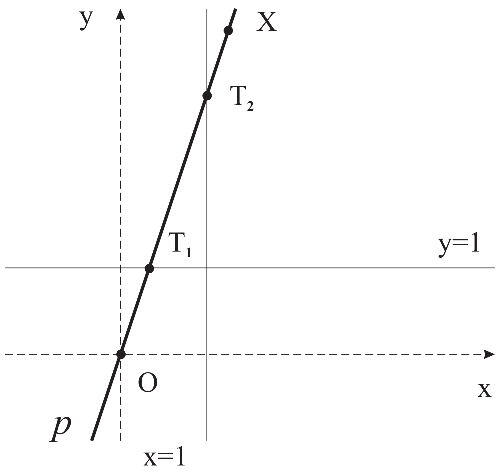
Слика 2:

није Хаусдорфов али проблем је само у конвергенцији „дуж вектора”v. Овај проблем се може заобићи додатном идентификацијом. То се постиже тако што се у дијаграму (6) уместо $Geo(\mathbb{Z}^2)$ став простор $Geo(C)$ где је $C = R \cap \mathbb{Z}^2$ и $R = P \cup Q$ дуал конуса $Pos(v)$. Ово нас доводи до дијаграма

$$\begin{tikzcd}
Geo(A) \arrow[d, swap, "f(a^{(1)})"] \arrow[d, "f(a^{(2)})"] & Geo(C) \arrow[l, swap, "\hat{e}_A"] \arrow[r, "\hat{e}_B"] \arrow[d] & Geo(B) \arrow[d, swap, "f(b^{(1)})"] \arrow[d, "f(b^{(2)})"] \\
\mathbb{C}^2 & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \arrow[l, "Q_A"] \arrow[r, swap, "Q_B"] & \mathbb{C}^2
\end{tikzcd} \tag{9}$$

3 Примери

Видели смо да се торусни варијетети добијају слепљивањем (идентификацијом) једноставних (афиних) варијетета. Најједноставнији пример је Риманова сфера добијена (дијаграм (5)) слепљивањем две копије од $\mathbb{C}$. Слично пројективни простор $\mathbb{P}^1$, дефинисан као колекција свих правих $p \subset \mathbb{C}^2$ које пролазе кроз координатни почетак, координатизује се (Слика 3) уз помоћ координате T_1 (дефинисане за све праве p различите од x-осе) и T_2 (дефинисане за све праве p различите од y-осе). Из релације $T_1T_2 = 1$ закључујемо да се ради о истом типу слепљивања одакле дедукујемо $S^2 \cong \mathbb{P}^1$.



Слика 3: Координате на $\mathbb{P}^1$ и на BL_0.

3.1 Реч-две о координатизацији

Координатизовање (картирање) неког скупа S је операција која се састоји од 3 корака:

K_1 : Покријемо скуп S „једноставним”скуповима U_j, тј. прикажемо га као унију $S = U_1 \cup \ldots \cup U_k$.

K_2 : На сваком скупу U_j уведемо координате (непрекидне функције) $z_1^j, \ldots, z_n^j$.

K_3 : Налазимо „функције прелаза”тј. функције дефинисане на пресецима $U_i \cap U_j$ које изражавају j-координате $z_1^j, \ldots, z_n^j$ преко i-координата $z_1^i, \ldots, z_n^i$.

У за нас најинтересатнијој ситуацији функције $\{z_i^j\}_{i=1}^n$ успостаљају бијекцију између скупа U_j и афиног простора $\mathbb{C}^n$ (или неког његовог отвореног подскупа). На тај начин се на скупу S дефинише структура многострукости што и јесте основни циљ координатизације.

На пример $\mathbb{P}^1 = U_1 \cup U_2$ где је $U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{x\text{-оса}\}$ и $U_2 = \mathbb{P}^1 \setminus \{y\text{-оса}\}$. Координата T_1 је координата на правој $y = 1$ тачке пресека праве p и праве $y = 1$, слично координата T_2 је координата на правој $x = 1$ тачке пресека праве p и праве $x = 1$ (Слика 3). Функција прелаза која изражава једну координату преко друге је $T_2 = 1/T_1$.

3.2 Blow up

Занимљив пример добијамо ако покушамо да координатизујемо скуп $BL_0 := \{(X, p) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid X \in p\}$ свих инциденција тачка-права, при чему се од праве захтева да пролази кроз координатни почетак. Ово је пример тзв. "blow up"-конструкције која има веома велики значај у геометрији и топологији.

Нека је $X = (x, y) \in \mathbb{C}^2$ произвољна тачка и $p = (p_1 : p_2)$ произвољна права кроз координатни почетак. Приметимо да је услов $X \in p$ еквивалентан са

$$\det \begin{bmatrix} x & p_1 \\ y & p_2 \end{bmatrix} = xp_2 - yp_1 = 0. \tag{10}$$

Приступимо реализацији програма из Одељка 3.1.

K_1 : Приметимо да је $BL_0 = U_1 \cup U_2$ где је $U_1 := \{(X, p) \mid p \neq x\text{-оса}\}$ и $U_2 := \{(X, p) \mid p \neq y\text{-оса}\}$. Према томе $(X, p) \in U_1 \cap U_2$ ако и само ако права p није ни хоризонтална ни вертикална у ком случају су обе координате T_1 и T_2 дефинисане и важи

$$(p_1 : p_2) = (T_1 : 1) = (1 : T_2).$$

K_2 : На скупу $U_1 \cap U_2$ све функције x, y, T_1, T_2 су добро дефинисане али нису независне јер важе релације $x = yT_1$ и $xT_2 = y$. На скупу U_1 глобално су дефинисане функције x, y, T_1 и важи релација $x = yT_1$. Одавде закључујемо да су природне координате на U_1 функције y и T_1. Тиме се успоставља природна бијекција између U_1 и $\mathbb{C}^2$. Слично се добија да су природне координате на U_1 функције x и T_2.

K_3 : За све парове $(X, p) \in U_1 \cap U_2$ важе релације $x = yT_1$ и $T_2 = 1/T_1$ одакле добијамо да се координате x, T_2 (на U_2) изражавају преко координата y, T_1 (на U_1), релацијом

$$\begin{bmatrix} x & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & T_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{\sharp}$$

Тиме смо реализовали програм из Одељка 3.1 и уверили се да је BL_0 заиста многострукост (варијетет) добијен слепљивањем две копије од $\mathbb{C}^2$ уз помоћ функција прелаза описаним у K_3. Покажимо да је BL_0 ништа друго него торусни варијетет асоциран са лепезом приказаном на Слици 4.

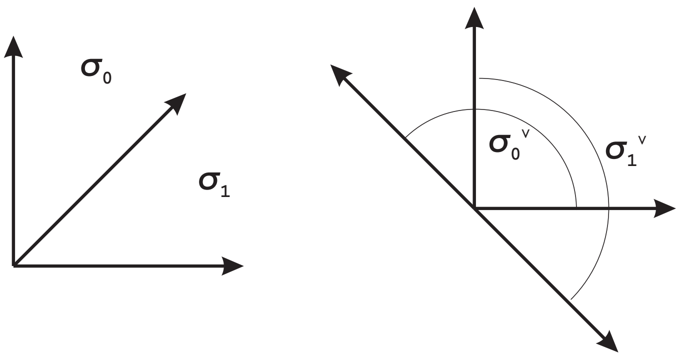
Да би се у то уверили довољно је изразити координате на скупу U_1 (а то су према K_2 функције y и T_1) као и координате на U_2 (а то су x и T_2) преко координата дефинисаних на скупу $U_1 \cap U_2$ (а то су функције x и y). Добијамо

$$[x \quad T_2] = [x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{\sharp} \qquad [y \quad T_1] = [x \quad y] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{\sharp}$$

или написано краће

$$[x \quad T_2] = [x \quad y] \; A^{\sharp} \qquad [y \quad T_1] = [x \quad y] \; B^{\sharp}$$

За крај је довољно приметити да су колоне матрица A и B ништа друго него изводнице конуса (углова) $\sigma_0^{\vee}$ и $\sigma_1^{\vee}$ приказаних на Слици 4 десно. Другим речима координате се понашају тачно онако као што се то догађа при торусним слепљивањима (дијаграми (6) и (11)).



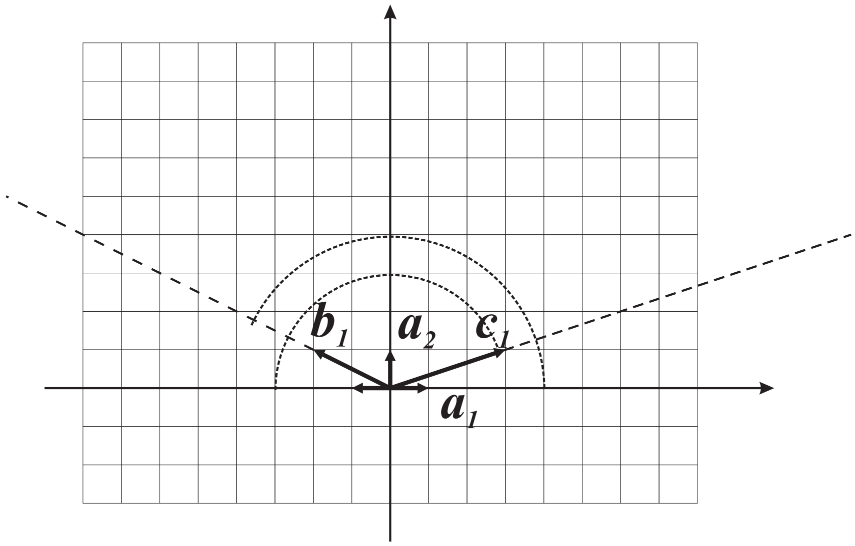
Слика 4: Лепеза асоцирана са варијететом BL_0.

3.3 Векторска раслојења

Нацртајмо Слику 4 поново али овога пута размотримо генерални случај било које лепезе састављене од два угла (конуса) који имају заједничку ивицу. С обзиром да су сваке две базе решетке $\mathbb{Z}^2$ еквивалентне, тј. може се прећи из једне у другу погодно изабраном матрицом $K \in GL(2,\mathbb{Z})$, увек можемо два од три вектора изабрати произвољно! Ако изабремо заједничку ивицу да буде вертикална долазимо до Слике 5 у којој су приказани само дуални конуси (као на Сликама 2 и 4 десно).

У контексту Слике 5 нека су B и C две полугрупе (типа III) генерисане примитивним целобројним векторима a_1 и b_1, односно векторима $-a_1$ и c_1. Користићемо и ознаку $B = \langle a_1, b_1\rangle$ и $C = \langle -a_1, c_1\rangle$. Слично, нека је $A = \langle a_1, -a_1, b_1\rangle$ полугрупа типа полуравни генерисана наведеним векторима. Даље, нека су $B_1 = \langle a_1\rangle$ и $C_1 = \langle -a_1\rangle$ полугрупе типа I и $A_1 = \langle a_1, -a_1\rangle$.

Задатак 0.6. Доказати да ако је $\{a_1, b_1\}$ база 2-димензионалне целобројне решетке и $\{a_1, c_1\}$ нека друга база исте решетке да је онда $c_1 = b_1 + ka_1$ за неки цео број $k \in \mathbb{Z}$. Одавде следи (Слика 5) да се сви вектори решетке који са неким, унапред заданим вектором a_1 формирају базу, налазе на правој паралелној са a_1.



Слика 5:

Из комутативног дијаграма полугрупа

$$\begin{array}{lccccc} & \langle a_1, b_1\rangle & \xrightarrow{e_A} & \langle a_1, -a_1, c_1\rangle & \xleftarrow{e_B} & \langle -a_1, b_1\rangle \\ (11) & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & \langle a_1\rangle & \xrightarrow[P_A]{} & \langle a_1, -a_1\rangle & \xleftarrow[P_B]{} & \langle -a_1\rangle \end{array}$$

добијамо комутативни дијаграм асоцираних Geo-простора

$$\begin{array}{lccccc} & Geo(B) & \xleftarrow{\hat{e}_A} & Geo(A) & \xrightarrow{\hat{e}_B} & Geo(C) \\ (12) & {\scriptstyle f(a_1)}\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & {\scriptstyle f(a_1)}\downarrow & & {\scriptstyle f(-a_1)}\downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ & \mathbb{C} & \xleftarrow[P_A]{} & \mathbb{C}^* & \xrightarrow[P_B]{} & \mathbb{C} \end{array}$$

где је $\pi_1(f) = f(a_1)$ и $\pi_2(f) = f(-a_1)$.

По дефиницији слепљивањем (идентификацијом) у првој врсти дијаграма (12) долазимо до варијетета X који је предмет наше анализе. Друга врста идентификацијом производи сферу S^2 као што смо се раније већ уверили (видети дијаграм (5)). Вертикалне „стрелице"у дијаграму (12) дефинишу пресликавање

$$\mu : X \to S^2.$$

Став 8. *Пресликавање $\mu : X \to S^2$ је комплексно, 1-димензионално векторско раслојење са Chern-овим бројем $k = c(\mu)$ који се може израчунати из релације $c_1 - b_1 = ka_1$.*

Доказ: Нека је $\{a_1, a_2\}$ стандардна ортогонална база (Слика 5) решетке $\mathbb{Z}^2$. Као што већ добро знамо постоји изоморфизам $Geo(B) \cong \mathbb{C}^2$ задат са $f \mapsto (f(a_1), f(b_1))$ за сваку геометријску прогресију $f : B \to \mathbb{C}$. Слично, постоји изоморфизам $Geo(C) \cong \mathbb{C}^2$ задат са $f \mapsto (f(-a_1), f(c_1)$.

Уверимо се да је $\mu : X \to S^2$ векторско раслојење. Изаберимо $h \in S^2$ и анализирајмо $\mu^{-1}(h)$.

Случај 1: Нека је $h : \langle a_1 \rangle \to C$ тачка из S^2 која долази из леве копије $\mathbb{C}$ у дијаграму (12) где је $\langle a_1 \rangle = \mathbb{N} \cdot a_1$ полугрупа генерисана са a_1. По дефиницији $f \in \mu^{-1}(h)$ ако и само ако је $f : \langle a_1, b_1 \rangle \to C$ прогресија која је екстензија од h, тј. за коју важи $f(ma_1) = h(ma_1)$ за сваки цео број $m \geq 0$. Другим речима прогресија f је већ одређена над $\langle a_1 \rangle$ и потребно ју је додефинисати у тачки b_1.

Закључак: Закључујемо да је $\mu^{-1}(h) \cong \mathbb{C}$ при чему је изаоморфизам одређен са $f \mapsto f(b_1)$. Ово је у пуној сагласности са горе описаним изоморфизмом $Geo(B) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ тј. ове формуле задају природну структуру (тривијалног) векторског раслојења над $Geo(B)$.

Случај 2: Слично се добија и у другом случају када је h геометријска прогресија дефинисана над $\langle -a_1 \rangle$. И у овом случају се добија project изоморфизам $Geo(C) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ као и $\mu^{-1} \cong \mathbb{C}$ али овог пута је изоморфизам $\mu^{-1}(h)$ задат са $f \mapsto f(c_1)$.

Из релације $c_1 - b_1 = ka_1$ добијамо $f(c_1) = f(b_1) \cdot h(a_1)^k$ или $f(c_1) = f(b_1) \cdot t^k$ ако је $t = f(a_1)$ координата на $\mathbb{C}^*$. Одавде и следи тражени закључак. $\square$

Задатак 0.7. *Уверити се да ако су $\xi_1, \xi_2 : S^2 \to X$ два (комплексна) сечења (у општем положају) датог раслојења да постоји тачно k различитих тачака $x_1, \ldots, x_k$ таквих да је $\xi_1(x) = \xi_2(x)$ ако и само ако је $x = x_j$ за неки $j = 1, \ldots, k$.*

Упутство:

(1) Изабрати бројеве $\alpha \neq \beta \in \mathbb{C}$ и дефинисати сечења ξ_1 и ξ_2 као константна сечења над левом копијом од $\mathbb{C}$ формулом

$$\xi_1(x) = f \Leftrightarrow (f(a_1) = x \text{ и } f(b_1) = \alpha), \xi_2(x) = f \Leftrightarrow (f(a_1) = x \text{ и } f(b_1) = \beta).$$

(2) Уверити се да над десном копијом од $\mathbb{C}$ ова сечења имају облик $\xi_1(x) = \alpha \times x^k$ и $\xi_2(x) = \beta \times x^k$. Решити по x једначину α

3.4 Крај 15-минутног мини-курса! Задаци за вежбу и проверу знања

Задатак 0.8. *Замените $Geo(A)$ са $Spec(\mathbb{C}[A])$ и погледајте уводне главе неке књиге из торусних варијетета. Пишите ми да ли вам је предприча о просторима геометријских прогресија помогла (одмогла) у освајању ове теорије и шта се и како могло друкчије излагати.*

Етиде за торусни варијетет
Београд, септембер 2010
РадеедаР

4 Дивизори

Тврђење 9. ([Ful], str. 61)

(13) $$\mathrm{div}(\chi^u)] = \Sigma_i \langle u, v_i \rangle D_i.$$

Доказ: По дефиницији (Fulton, [Ful]), χ^u је рационална функција задана са $\chi^u(f) = f(u)$. Другим речима χ^u је просто евалуација функције у датој тачки u, уз претпоставку да је u у домену геометријске прогресије f која репрезентује тачку нашег торусног варијетета.

Због прегледности и једноставније нотације доказ ћемо извести за случај дводимензионалних варијетета. Напоменимо да општи случај не захтева никакве нове идеје.

Нека су $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ сви дводимензионални конуси наше лепезе. По претпоставци v_i и v_{i+1} су примитивни вектори решетке на изводницама конуса σ_i ($v_{n+1} := v_1$). Нека је $\sigma_i^\vee$ конус дуалан конусу σ_i и нека су a_i, a_{i+1} примитивни целобројни вектори (вектори решетке) на његовим изводницама. Одавде следи да је $\{a_i, a_{i+1}\}$ база дуална бази $\{v_i, v_{i+1}\}$ па као последицу добијамо једнакост

$$u = \langle u, v_i \rangle a_i + \langle u, v_{i+1} \rangle a_{i+1}.$$

Ако су $t_1 = f(a_i)$ и $t_2 = f(a_{i+1})$ координате у карти $U_{\sigma_i} := Geo(\sigma_i^\vee \cap \mathbb{Z}^2)$ онда по дефиницији рационална функција χ^u (у овим координатама) има следећу форму:

$$\chi^u(f) = f(u) = f(\langle u, v_i \rangle a_i + \langle u, v_{i+1} \rangle a_{i+1}) = t_1^{\langle u, v_i \rangle} t_2^{\langle u, v_{i+1} \rangle}.$$

Пошто је дивизор D_i у локалним координатама t_1, t_2 описан једначином $t_1 = 0$, непосредно закључујемо да је

$$\mathrm{Ord}_{D_i}(\chi^u) = \langle u, v_i \rangle.$$

Одавде се одмах долази до једнакости (13) пошто је $\mathrm{div}(\chi^u)$ еквиваријатан дивизор (тј. дивизор инваријантан при дејству торуса $(\mathbb{C}^*)^2$) а сви такви дивизори су линеарне комбинације дивизора D_i. $\square$

5 Кушниренкова теорема (скица)

Кушниренкова теорема је сама по себи толико занимљива и важна да је њено изучавање и разумевање сасвим довољан разлог за студирање торусних варијетета.

Ми ћемо се (као и у претходним главама) ограничити на дводимензионални случај, тј. на случај полинома две варијабле. Све основне идеје се већ ту у потпуности манифестују и омогућују лаки прелаз на општи случај.

Дефиниција 10. Целобројни носач $A(P)$ полинома $P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ дефинишемо као минималан скуп $A \subset \mathbb{Z}^2$ такав да је

$$P(x,y) = \sum_{(i,j)\in A} a_{i,j} x^i y^j.$$

Њутнов полигон $\Delta(P)$ полинома P се дефинише као конвексни омотач скупа $A(P)$.

Приметимо да је увек $\Delta(\alpha P) = \Delta(P)$ ако је $\alpha \neq 0$. Такође важи

$$\Delta(P_1 P_2) = \Delta(P_1) + \Delta(P_2)$$

где је са десне стране појављује сума полигона у смислу Минковског. Шта можемо рећи о Њутновом полигону $\Delta(P_1+P_2)$ суме два полинома!? Приметимо да је увек $A(P_1 + P_2) \subset A(P_1) \cup A(P_2)$ одакле следи релација

$$\Delta(P_1 + P_2) \subset \operatorname{conv}(\Delta(P_1) \cup \Delta(P_2)).$$

Једнакост не мора увек важити јер се неки коефициенти могу поништити! Међутим врло је мала вероватноћа да ће се баш то десити ако су P_1 и P_2 „случајно изабрани полиноми“! Другим речима ако су P_1 и P_2 „типични“(генерички изабрани) полиноми онда важи једнакост

$$\Delta(P_1 + P_2) = \operatorname{conv}(\Delta(P_1) \cup \Delta(P_2)).$$

Сасвим прецизно се идеја генеричности исказује на следећи начин. Кажемо да неки исказ о полиномима важи за типични, односно генерички избор полинома ако је скуп изузетака нигде густ, затворен скуп у простору полинома које разматрамо.

Теорема 11. (Кушниренко) *Претпоставимо да су* $P_1(x,y)$ *и* $P_2(x,y)$ генерички изабрани полиноми *са једнаким Њутновим полигонима,*

$$\Delta = \Delta(P_1) = \Delta_2(P_2).$$

Тада систем једначина

$$P_1(x,y) = 0 \quad P_2(x,y) = 0$$

има тачно $2m(\Delta)$ *решења у скупу* $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *комплексних бројева различитих од нуле, где је* $m(\Delta)$ *површина Њутновог полигона* Δ.

Читаоца заинтересованог за комплетан доказ ове теореме упућујемо на [GKZ], Глава 5. Ми ћемо се ограничити на кратак приказ неколико кључних корака који су посебно садржајни и занимљиви.

Реч-две о доказу Теореме 11:

Започнимо дискусију доказа малим разјашњењем шта у овом конкретном случају значи да теорема важи за типични, односно генерички избор полинома P_1 и P_2. Нека је $A := \mathbb{Z}^2 \cap \Delta$ скуп свих целобројних тачака унутар полигона Δ. Сви полиноми P такви да је $A(P) \subset A$, тј. такви да је $\Delta(P) \subset \Delta$, чине векторски простор $\mathcal{P}(A)$ димензије $m = |A|$.

Ако изаберемо два полинома из $\mathcal{P}(A)$ онда за типичан избор важи

$$A(P_1) = A(P_2) = A \qquad \text{и} \qquad \Delta(P_1) = \Delta(P_2) = \Delta.$$

- **Напомена:** Ово наравно још није довољно да би важила Теорема 11. Заправо из доказа ће се видети да постоји свуда густ отворен скуп $U \subset \mathcal{P}(A)$ такав да тврђење Теореме 11 важи ако су оба полинома P_1 и P_2 изабрана из U. Ово с друге стране гарантује да ако теорема случајно не важи за неки избор $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(A)$ да се онда произвољно малом променом коефицијента ових полинома може доћи до пара $P_1', P_2' \in \mathcal{P}(A)$ за којег је теорема тачна, као и да се ово својство не губи ако се (на било који начин) ови полиноми промене додатном (довољно малом) варијацијом коефицијента.

Пођимо од опсервације да се сваки полином $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ степена n може схватити као рестрикција линеарне функције $L : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$,

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \langle a, x\rangle$$

на криву $\Gamma = \{(1, t, t^2, \dots, t^n) \mid t \in \mathbb{C}\}$. То значи да је налажење решења једначине $p(t) = 0$ есенцијално исто што и налажење пресека криве Γ и хиперравни $H := \mathrm{Ker}(L) = L^{-1}(0)$.

Задатак 0.9. Дедуковати „Основни став алгебре“, који тврди да сваки полином $p(t)$ има бар једну нулу, из чињенице да је пресек $H \cap \Gamma$ увек непразан!

Применимо исти план и на случај налажења заједничких решења система $P_1(x, y) = P_2(x, y) = 0$. Пре свега приметимо да се и полиноми у две варијабле такође могу разумети као рестрикције линеарних форми али не на кривој већ на канонски дефинисаној површи која зависи само од носача полинома A. Нпр. нека је $A = \{(0, 0), (1, 0), (2, 3), (1, 4)\}$. У овом случају је сваки полином из $\mathcal{P}(A)$ облика

$$P(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{23}x^2y^3 + a_{14}xy^4.$$

Приметимо да је $P(x, y)$ рестрикција линеарне форме

$$L : \mathbb{C}^A \to \mathbb{C}, \qquad L(x) = a_{00}x_{00} + a_{10}x_{10} + a_{23}x_{23} + a_{14}x_{14}$$

на површ Y_A која је у параметарском облику (са параметрима x и y) задана једначинама

$$x_{00} = 1 \quad x_{10} = x \quad x_{23} = x^2y^3 \quad x_{14} = xy^4.$$

Овај пример убедљиво демонстрира да слично мора важити и у општем случају. Заиста, ако је $A \subset \mathbb{Z}^2$ коначан скуп целобројних тачака, онда се сваки полином $P(x,y) \in \mathcal{P}(A)$ са носачом у A може се видети као рестрикција линеарне форме

$$L_P : \mathbb{C}^A \to \mathbb{C}, \quad L_P(x) = \sum_{\omega \in A} a_\omega x_\omega$$

на површ

$$Y_A = \{(x_\omega)_{\omega \in A} \in \mathbb{C}^A \mid x_\omega = x^{\omega_1}y^{\omega_2}\}.$$

Као и у случају полинома једне варијабле закључујемо да се скуп решења једначине $P(x,y) = 0$ природно интерпретира као пресек $Y_A \cap H_P$ где је $H_P = \mathrm{Ker}(L_P) = \{x \in \mathbb{C}^A \mid L_P(x) = 0\}$, а скуп решења система $P_1(x,y) = P_2(x,y) = 0$ као пресек

$$Y_A \cap H_{P_1} \cap H_{P_2} = Y_A \cap H$$

где су $H_{P_1} = L_{P_1}^{-1}(0)$ и $H_{P_2} = L_{P_2}^{-1}(0)$ хиперавни у $\mathbb{C}^A \cong \mathbb{C}^m$ а $H = H_{P_1} \cap H_{P_2}$ (у генеричком случају!) линеарни подпростор од $\mathbb{C}^A$ кодимензије 2.

Закључак: Доказ Кушниренкове теореме се свео на оцену броја тачака у пресеку $Y_A \cap H$ где је Y_A канонска површ асоцирана са A а H генерички линеарни подпростор кодимензије 2.

Читалац који је покушао да реши Задатак 0.9 можда се и овде запитао шта је стварно добијено тиме што је проблем решавања система сведен на налажење броја тачака у пресеку два подваријетета (комплементарних димензија) у заданом амбијетном варијетету. Одговор даје следећи принцип велике општости и примењивости.

Принцип пресецања варијетета: И алгебарска геометрија и алгебарска топологија умеју, различитим али блиским методама, да анализирају проблем „налажења пресека“ $Y_1 \cap Y_2$ два подваријетета заданог варијетета X. Фундаментално важно је да је то изводљиво *само ако* је амбиент X компактан варијетет (у алгебарској топологији) односно пројективни варијетет (у алгебарској геометрији). На пример компактност даје могућност да се (у оквиру алгебарске топологије) примени Поенкареова теорема дуалности и пресецање (хомолошких класа) сведе на израчунавање "cup"-производа одговарајућиј дуала. Сличну улогу у алгебарској геометрији имају дивизори и њихови пресеци, видети на пример [Ful], Глава 5.

Пошто су и амбиент $\mathbb{C}^A$ као и подваријетети Y_A и H некомпактни, потребно је, сагласно горњем принципу, прво извршити њихову *компактификацију*. Амбиент $\mathbb{C}^A$ се компактификује до пројективнох простора, H до његовог пројективног подпростора, а површ Y_A до одговарајућег *торусног варијетета* X_A (видети [GKZ], Глава 5).

Следећи корак је одређивање пресека ових варијетета. У овом специјалном случају, с обзиром да је један од варијетета пројективни подпростор, проблем се своди на израчунавање *степена* пројективног варијетета X_A, видети [Mum], Глава 5, или [GKZ], Глава 5. Кључна за израчунавање је врло елегантна Теорема 6.25 ([Mum], страна 112) која појам степена пројективног варијетета доводи у везу са Хилбертовим полиномом координатног прстена варијетета X_A. На крају доказа ([GKZ], Теорема 3.14. на страни 186) (локални) степен (афиног) торусног варијетета се директним и једноставни рачуном доводи у везу са површином полигона Δ.

Библиографија

[Ful] W. Fulton. *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press 1993.

[GKZ] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinski. *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser 1994.

[Kho] A.G. Khovanski. Newton polyhedra (algebra and geometry).

[Mum] D. Mumford. *Algebraic Geometry I; Complex Projective Varieties*, Springer 1976.